

# 題目：六軸機械臂之控制理論分析與應用

## 作者



**江修**

工研院機械所  
智慧機械技術組  
機電控制整合部



**黃偉峰**

工研院機械所  
智慧機械技術組  
機電控制整合部

## 關鍵字

機器人	Robot
整合式運動定位 IC	EPCIO
機械臂	Robotics Manipulators
正向運動學	Forward Kinematics
反向運動學	Inverse Kinematics
奇異點	Singularity
奇異帶	Singular Band

## 摘要

本文介紹六軸機械臂運動學(kinematics)，包含正向運動學（forward kinematics），反向運動學（inverse kinematics），奇異點迴避等問題。另外也介紹了機器人設置考量及使用場合。在運動學推導部份，特別著重使用幾何觀點進行推導，用這種方式，使用者很容易將六軸機械臂計算方程式化為最簡方程，可大幅增進計算效能，並且提昇對機構認知能力。

## 前言

從 20 世紀中葉，機器人從理論研究開始走向實用階段，在多種領域尤其是工業、娛樂業、科學研究與太空等領域被廣泛應用。

在機器人的歷史上，機器人(robots)這個名詞最早出現在 1921 年捷克劇作家 Karel Capek 的科幻劇本“Rossum’s Universal Robots”中，“Robots”其原意是”forced labor”。但是實用機器人技術研究是在 20 世紀 50 年代才開始起步，1962 年第一台工業機器人被安裝在 General Motor 公司的生產線上。時至今日，世界上已有上百萬臺工業機器人在服役，其中有 90% 的機器人應用於工業領域，在汽車和半導體製造業應用尤為廣泛(Fig-1, Fig-2 取自 Fanuc 網站)。80 年代末期，日本等國家開始進行高度智慧化機器人之研究，其中最出名當屬 2000 年本田汽車之 ASIMO 類人型機器人(Fig-3)。ASIMO 之先進性及其所提出的願景，促使世界許多國家大幅加大機器人領域的投資。

今日機器人的應用日益廣泛，因此對它各方面的探討也就非常的深入且廣泛。其中機械臂的研製應可算是最基本的工作，但仍需面對包羅萬象的分門學問。本文由六軸機械臂(6-joint Robotics manipulators) (Fig-4，取自 Fanuc 網站)的設計研製開始著手研討。

六軸機械臂控制涉及運動學(kinematics)，動力學(dynamics)及控制理論。本文主要著重於幾何觀點之運動學解算，包含由機械臂之工作點及姿態(posture)來計算六軸旋轉角，及由旋轉角推空間工作點位置及姿態，以完成空間軌跡規劃等。

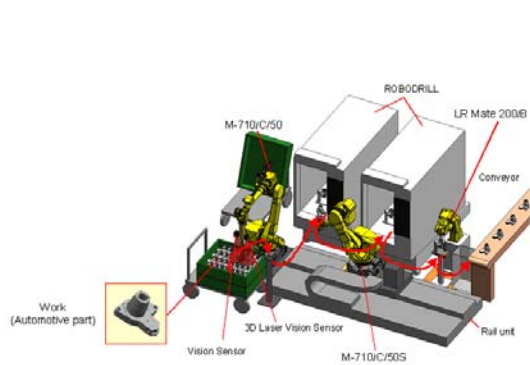


Fig-1

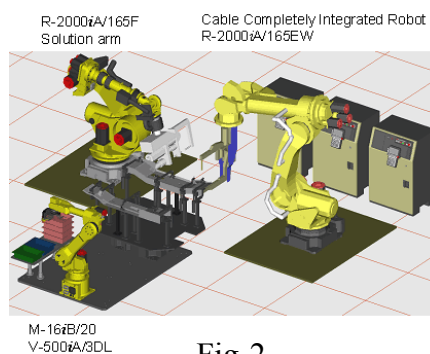


Fig-2



Fig-3



Fig-4

## 機器人設置考量

安裝機器人或機械臂應考量下列原則

- 1.符合 4D 原則之工作,可考慮使用機器人。所謂 4D 是指 dull(呆板)、dirty(骯髒)、dangerous(危險)、difficult(困難)。
- 2.是否有人願意以同樣代價進行該項工作。
- 3.機器人是用來簡化工作而非取代人類。
- 4.經濟考量,包含設置成本、效能、彈性度、維護成本等。

## 機器人應用場合

機器人除了正常維修保養,機器人可以每天 24 小時迅速、準確、不間斷地工作,無需休息,也不會疲憊。機器人可以替代人去從事複雜危險環境下的工作,也特別適合做一些對人來說是枯燥無味的重複工作。

目前機器人應用領域正在不斷拓寬,可分為數個領域進行描述。

### **製造業**

許多人將應用於製造業的機器人叫做工業機器人。這些工業機器人代替人類完成大量、高質量要求的工作,如汽車製造,家電產品製造(例如電視機,洗衣機)、化工及食品包裝等行業。

汽車製造業擁有機器人的數量為最多,機器人在汽車自動化生產線上完成焊接、噴漆、裝配等工作。另外平面關節型(SCARA)機器人具有速度快、精度高、彈性大等特點,大量應用於電子、機械等產品的自動裝配、搬運等工作。

工業機器人在執行物料的搬運、包裝等作業也廣為應用,如自動化倉儲中的吊臂或自動導引車 AGV (Automated Guided Vehicle)。

### **科學探索**

不論在宇宙或海洋,機器人已經開始施展身手。在 2004 年,美國“奧德賽號”火星探測器,進入了火星軌道。它肩負了尋找測量火星表面化學和礦物質組成情況、尋找火星表面可能隱藏的水資源、評估人類登上火星可能面臨的危險任務。

### **服務業**

在服務業領域,各種服務用智能機器人如導遊機器人、護士助手、步行功能訓練機器人、導盲機器人等已逐漸走進了市場。主要用於展覽館、旅遊景點、大型商場等服務行業的導遊、導購、多媒體訊息查詢等特殊服務。21 世紀的服務用智能機器人除了可以為家庭從事簡單的家務勞動和健康護理工作外,還可以從事一些勞動強度大,工作重複性強的工作,諸如環境保護,打掃以及公共交通服務等。

### **醫學用途**

在醫學方面應用主要作為醫療設備來輔助醫生和醫學工作者從事醫療、醫學研究和教學。如遠端手術機器人、醫用微型機器人等

### **軍事用途**

軍事領域上機器人可以代替士兵執行拆除炸彈、掃雷、偵察和攻擊等各種任務。

## 六軸機械臂簡介

六軸機械臂(6-joint Robotics manipulators)可由 Fig-5， Fig-6 所示意。它由六個伺服旋轉軸(joint)及軸間之剛性連結(rigid link)所構成。

Fig-5 前三軸用來支撐及控制機械臂(arm)，它主要決定了手(hand， tool or end-effector)及腕(wrist)在空間的位置；後三軸不含手構成了腕(wrist)，它主要決定了手的擺置方式(姿態)。

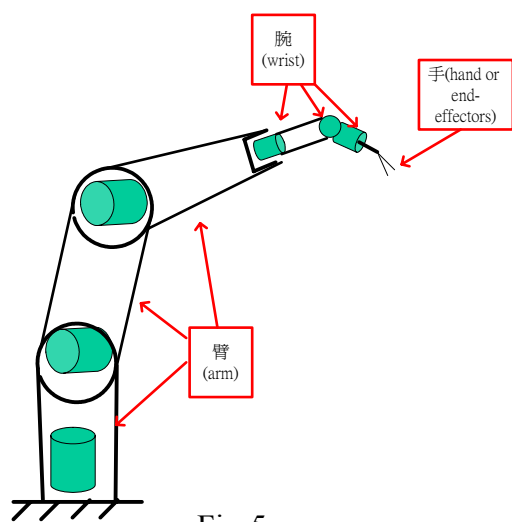


Fig-5

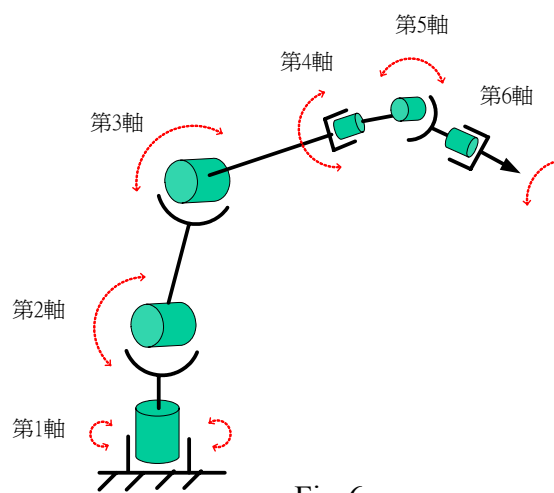


Fig-6

Fig-5 之腕關節屬於尤拉型(Euler)腕關節，可參考 Fig-7。尤拉型腕關節特色在於給定第四軸，第五軸一定角度後(J4， J5)，可將安裝在腕關節上之手指向任意方向，再給定第六軸角度可調整手姿態。Fig-7 之機構，經由特殊設定，可進一步將  $O_{wc\_s}$  與  $O_{wc}$  點重合 (Fig-8)。如此，Fig-8 便形成理想尤拉型關節。以後計算手坐標(H 點)與腕坐標中心  $O_{wc}$ (wrist center)關係可由下式表示。

$$\vec{OH} = \vec{O_{wc}} + L \frac{\vec{Oh}}{\|\vec{Oh}\|} \quad \text{其中向量 } \vec{Oh} \text{ 為手的指定方向，} L \text{ 為手至腕關節中心距離。}$$

離。

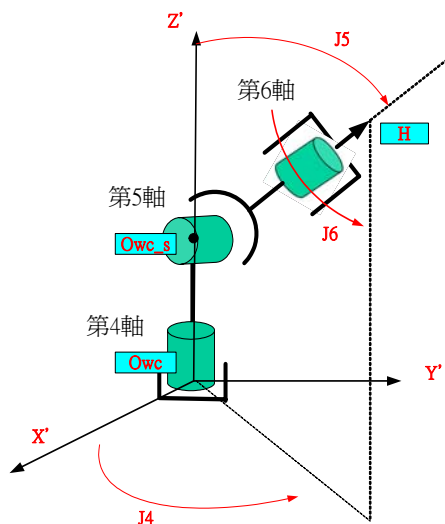


Fig-7

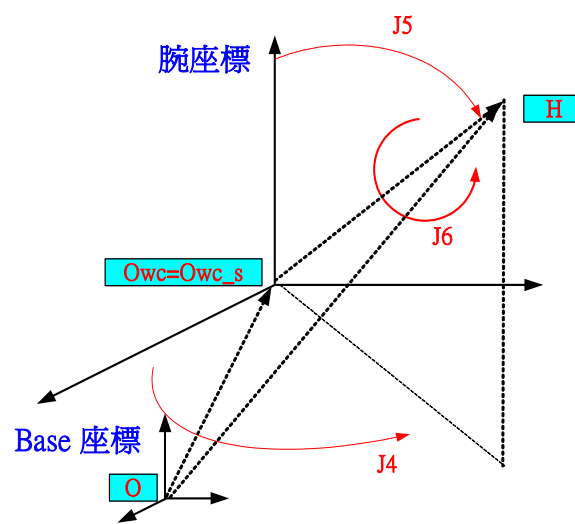


Fig-8

前三軸機械臂的一般型式是如 **Fig-9** 所示。它與 **Fig-6** 不同之處在於第二軸與第一軸之機構連結有一段水平偏移。當腕關節總成裝上後，前三軸之主要任務在於將腕關節中心移送至空間之需求位置。

裝上了理想尤拉關節之六軸機械臂，由前三軸決定一個腕空間位置，之後再由該空間點向某一方向偏移一個固定位移即為手的位置。

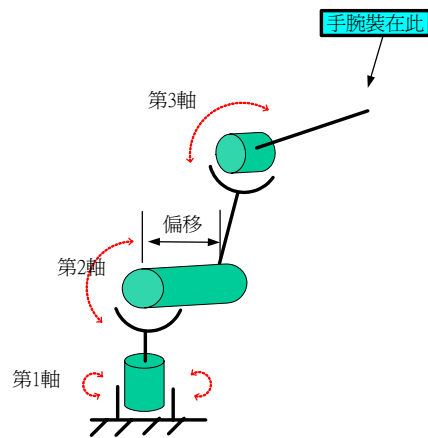


Fig-9

## 系統配置

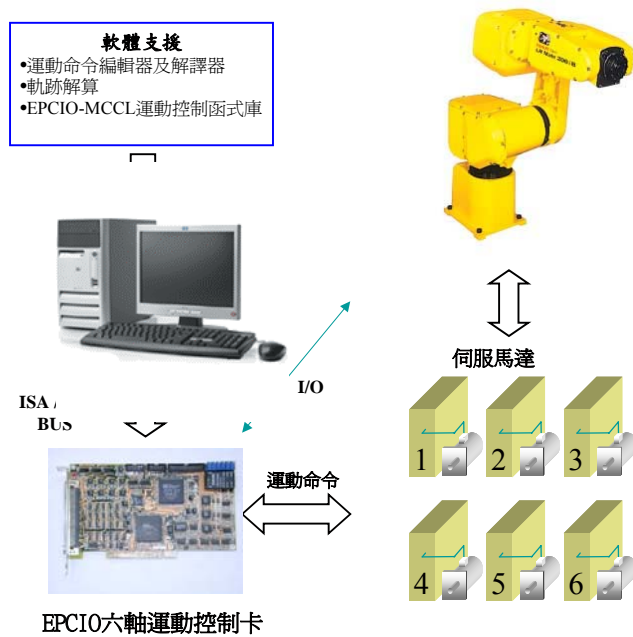


Fig-10

**Fig-10** 的右上角為六軸機械臂，每一軸由一組伺服馬達驅動。左下角為工研院機械所之 EPCIO 六軸運動控制卡。EPCIO 運動控制卡及其上層軟體負責六軸機械臂位置解算及一些基本之空間運動命令解算，如點對點運動，直線運動，空間弧運動等。在更上層之運動命令編輯器負責編程六軸機械臂移動全部路徑。

一般而言運動命令編輯器支援手動編輯，線上教導方式，軟體視覺模擬等功能。

下面將介紹六軸機械臂之**運動學**解算，包含由機械臂之手位置及方向來計算六軸旋轉角，由旋轉角推空間手位置及方向，空間軌跡規劃等。

## 機構定義及幾何涵義

參考 Fig.11~15， $J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6$  為第一至六軸旋轉角。Fig.12 是將 Z-X 平面繞 Z 軸轉  $J_1$  後所視之圖。Fig.13-15 描述腕關節抽象示意，此處機構略有不同於 Fig-5、6。

X-Y-Z 坐標是絕對坐標系(base coordinate system)，OA，AB，BC，CD，DE 為臂(arm)，其中  $\angle OAB = \angle CDE = 90^\circ$ ；OA 長度=L10；AB 長度=L11；BC 長度=L2；CD 長度=L30；DE 長度=L31。

EP 代表理想尤拉型(Euler)腕關節抽象示意(可參考 Fig-7，8)，P 點為手或工具(tool)安裝起點，P 點定義為工作點(tool center)。X'-Y'-Z'坐標定義為腕坐標系(wrist coordinate system)，其中 Z'在 DE 射線方向上，X'垂直於地面；E 為腕坐標中心(wrist center)。L4 為尤拉型腕關節腕坐標中心至工作點之距離。

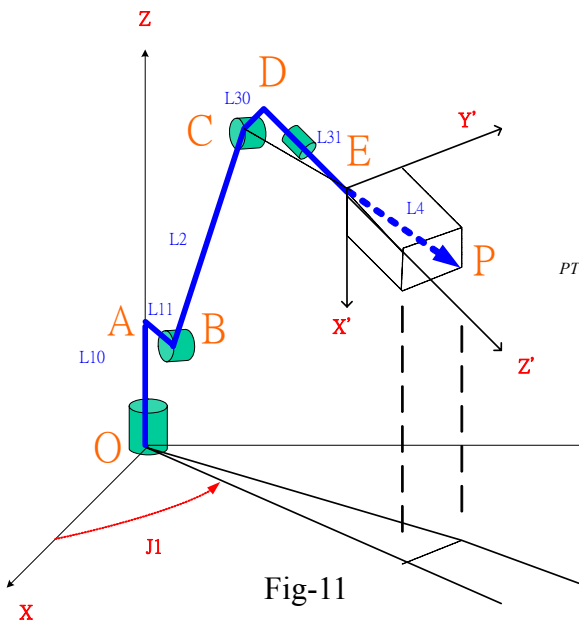


Fig-11

$$PT = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}$$

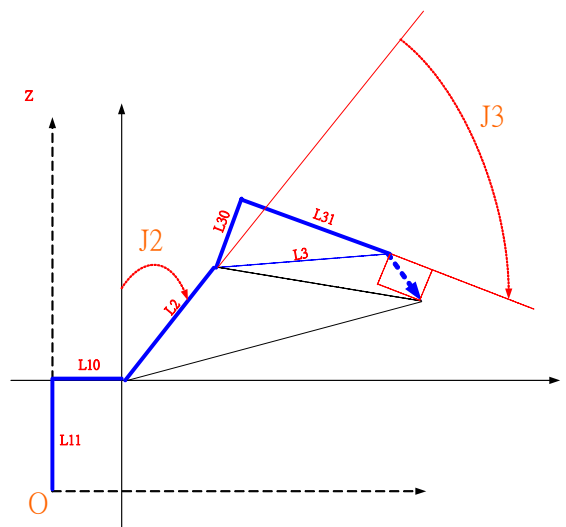


Fig-12

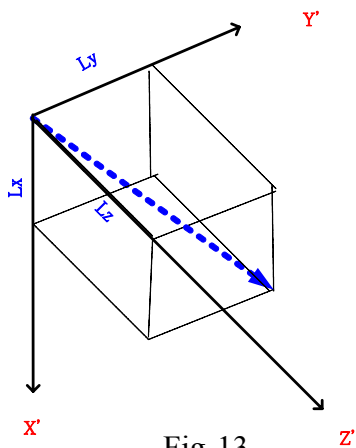


Fig-13

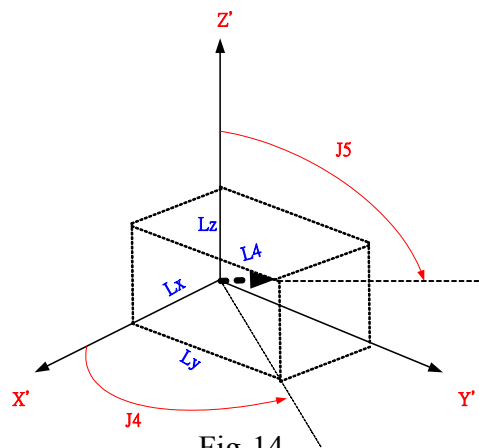


Fig-14

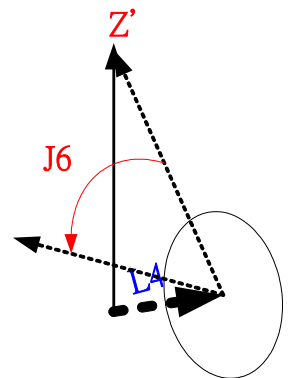


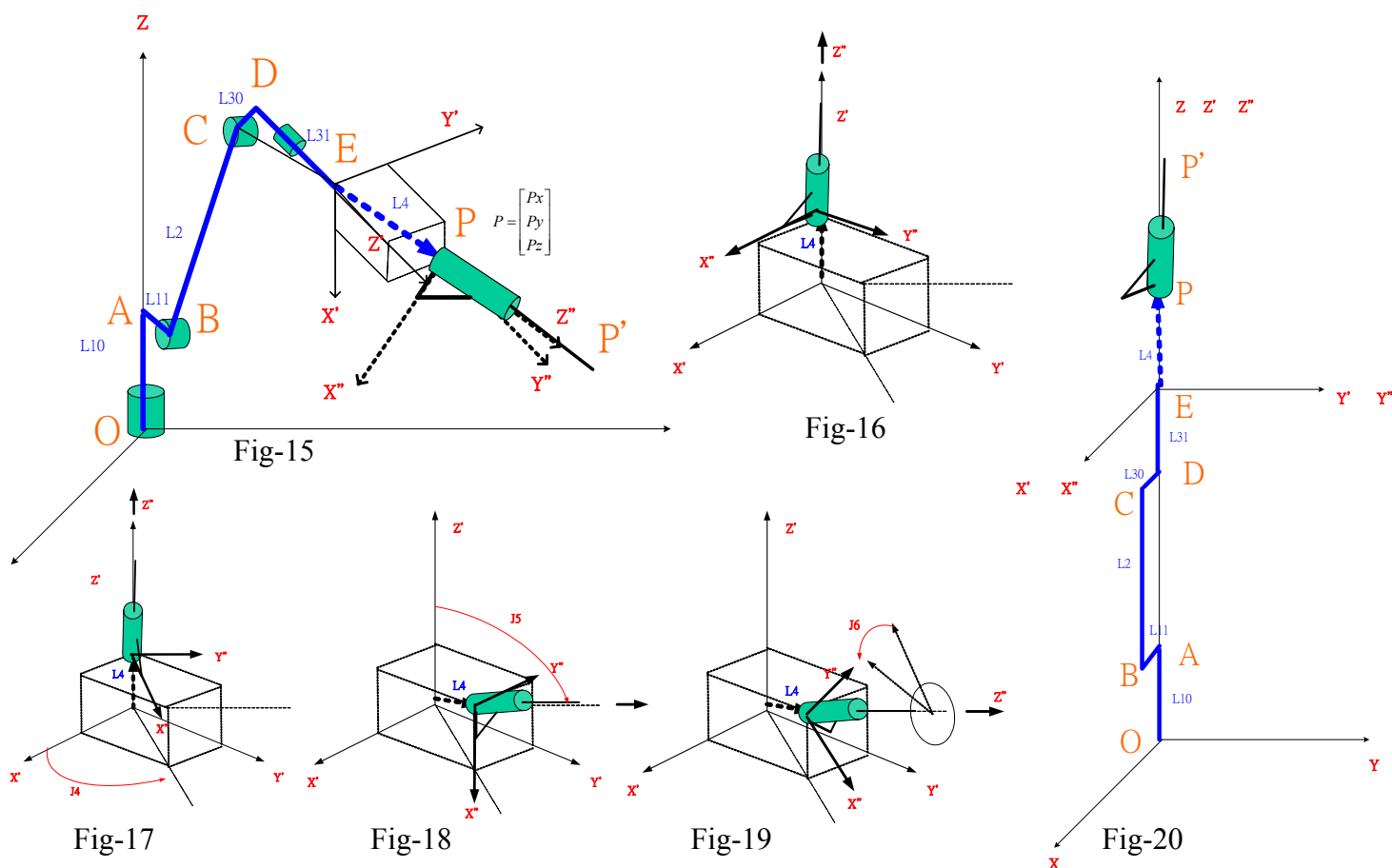
Fig-15



**Fig-15** 顯示了將工具裝上機械臂之情形。相互垂直之  $X''$ ,  $Y''$ ,  $Z''$  向量定義工具相對於世界座標之局部座標系，我們稱他為**姿態向量**，其中  $Z''$  代表工具之指向， $X''$  是代表工具手把方向。工具是延著 EP 射線方向安裝， $X''$  或  $Y''$  可顯示工具延著  $Z''$  指向之旋轉偏移量。事實上，裝上工具後之真正工作點是指  $P'$  點，非指  $P$  點；另外， $L4$  也應等於  $EP'$  長而非  $EP$  長。本文以下之討論還是假設工作點為  $P$  點，**Fig-15** 在此是用來說明姿態向量之用。

**Fig-20** 為  $J1=J2=J3=J4=J5=J6=0$  之初始狀態。在初始狀態下，腕坐標系與絕對坐標系的三個軸皆在同方向，唯一差異為腕坐標系原點  $E$  在  $O$  點正上方。另外初始姿態之  $X''$  與  $X$  軸同向， $Y''$  與  $Y$  軸同向， $Z''$  與  $Z$  軸同向。

**Fig-16~19** 為尤拉型腕關節分解動作，顯示在腕坐標上看到的電鑽槍是如何轉至所需之姿態上去。**Fig-16** 為初始狀態，此時  $J4=J5=J6=0$ 。**Fig-17** 中，第四軸旋轉  $J4$  角，所以電鑽槍也繞  $Z''$  軸轉了  $J4$ 。**Fig-18** 中，第五旋轉  $J5$ ，所以電鑽槍向  $X'-Y'$  平面倒下了  $J5$  角度。經過了第四第五軸之轉動，電鑽槍已轉至所需求之方向，第六軸與方向無關，只與姿態調整有關。**Fig-19** 中，第六軸旋轉  $J6$  角，最終使電鑽槍姿態與要求姿態符合。



## 符號及一些數學

1. 三維空間坐標以  $4 \times 1$  矩陣表示之如  $\begin{bmatrix} Px \\ Py \\ Pz \\ 1 \end{bmatrix}$ ，其中 '1' 是固定，其餘  $Px$ ， $Py$ ，

$Pz$  分別為  $x$  軸， $y$  軸， $z$  軸分量。

2. 基本齊次坐標轉換矩陣

$$T_{x,a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{延 } x \text{ 軸方向平移 } a)$$

$$T_{y,b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{延 } y \text{ 軸方向平移 } b)$$

$$T_{z,c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{延 } z \text{ 軸方向平移 } c)$$

$$R_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{以 } x \text{ 軸爲中心，正方向轉 } \alpha \text{ 角，依右手定則})$$

$$R_{y,\beta} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{以 } y \text{ 軸爲中心，正方向轉 } \beta \text{ 角，依右手定則})$$

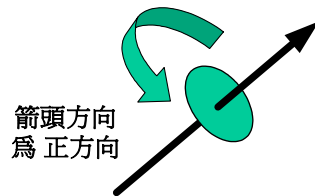
$$R_{z,\gamma} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{以 } z \text{ 軸爲中心，正方向轉 } \gamma \text{ 角，依右手定則})$$

$$\text{rotX}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (\text{以 } x \text{ 軸爲中心，正方向轉 } \alpha \text{ 角，依右手定則})$$

$$\text{rotY}(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (\text{以 } y \text{ 軸爲中心，正方向轉 } \beta \text{ 角，依右手定則})$$

$$\text{rotZ}(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{以 } z \text{ 軸爲中心，正方向轉 } \gamma \text{ 角，依右手定則})$$

注意:右手定則



## 正向運動學(forward kinematics)

在不考慮到速度與扭力控制的情況下，機械臂必須先求出正反向運動學方程式，其目的在於讓機械臂可以在卡氏坐標系(Cartesian Coordinate)與軸坐標系(Joint Coordinate)間自由轉換。

所謂正向運動學所指的是利用機械臂各軸所轉動之角度，去推出其工作點在三度空間上的位置及工具姿態向量。反向運動學則反向利用三度空間點坐標及姿態反推各軸轉動量。

**正向運動學問題:**已知  $J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6$ ，求機械臂各點位置及最終工具姿態向量(**Fig-11, Fig-20**)

1. 定義函數  $T_x(a) = T_x \cdot a \quad T_y(b) = T_y \cdot b \quad T_z(c) = T_z \cdot c$

$$R_x(\alpha) = R_x \cdot \alpha \quad R_y(\beta) = R_y \cdot \beta \quad R_z(\gamma) = R_z \cdot \gamma$$

2. 參考 **Fig-11**，給定 O, A, B, C, D, E, P 點坐標為

$$O = [0 \ 0 \ 0]^T ; A = [ax \ ay \ az]^T ; B = [bx \ by \ bz]^T ; C = [cx \ cy \ cz]^T ; D = [dx \ dy \ dz]^T ; E = [ex \ ey \ ez]^T ; P = [px \ py \ pz]^T$$

3. **A 點坐標**可由下式求得

$$[A^T \ 1]^T = T_z(L11) * [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$$

幾何觀點:

$$A = [0 \ 0 \ L11]$$

4. **B 點坐標**

$$[B^T \ 1]^T = T_z(L11) * R_z(J1) * T_x(L10) * [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$$

幾何觀點:

$$B = A + \text{向量 } AB = A + [L10 \cos(J1) \quad L10 \sin(J1) \quad 0]$$

5. **C 點坐標**

$$[C^T \ 1]^T = T_z(L11) * R_z(J1) * T_x(L10) * R_y(J2) * T_z(L2) * [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$$

幾何觀點:

$$C = B + \text{向量 } BC = B + [L2 \sin(J2) * \cos(J1) \quad L2 \sin(J2) * \sin(J1) \quad L2 \cos(J2)]$$

6. **E 點坐標**

$$[E^T \ 1]^T = T_z(L11) * R_z(J1) * T_x(L10) * R_y(J2) * T_z(L2) * R_y(J3 - \pi/2) * T_z(L30) * R_y(\pi/2) * T_z(L31) * [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$$

幾何觀點:

$$E = C + \text{向量 } CE = C + [L3 \sin(J2 + J3 - \angle DEC) * \cos(J1) \quad L3 \sin(J2 + J3 - \angle DEC) * \sin(J1) \quad L3 \cos(J2 + J3 - \angle DEC)]$$

$$\text{其中 } L3 = (L30^2 + L31^2)^{0.5}, \angle DEC = \tan^{-1}(L30/L31)$$

7. **P 點坐標(tool center)**

$$[P^T \ 1]^T = T_z(L11) * R_z(J1) * T_x(L10) * R_y(J2) * T_z(L2) * R_y(J3 - \pi/2) * T_z(L30) * R_y(\pi/2) * T_z(L31) * R_z(J4) * R_y(J5) * R_z(J6) * T_z(L4) * [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$$

幾何觀點:  $P=E+$  向量  $EP$ , 但向量  $EP$  不易直接求出, 所以計算  $P$  點坐標  
應以矩陣法為宜

8. 姿態向量

**Fig-20** 在初始狀態下之  $X''=[1\ 0\ 0]^T$   $Y''=[0\ 1\ 0]^T$   $Z''=[0\ 0\ 1]^T$

則最終在 **Fig-11** 之  $X''$ ,  $Y''$ ,  $Z''$  如下:

$$[(X'')^T\ 1]^T = R_z(J1) * R_y(J2+J3) * R_z(J4) * R_y(J5) * R_z(J6) * [1\ 0\ 0\ 1]^T$$

$$\text{令 } R_z(J1) * R_y(J2+J3) * R_z(J4) * R_y(J5) * R_z(J6) = T$$

$$\text{則 } [(X'')^T\ 1]^T = T * [1\ 0\ 0\ 1]^T$$

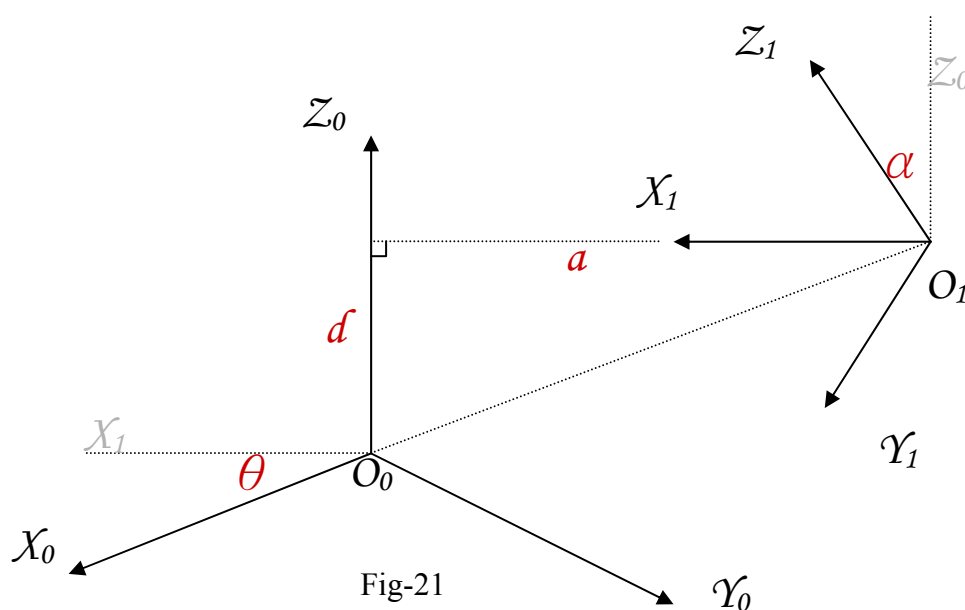
$$\text{同理 } [(Y'')^T\ 1]^T = T * [0\ 1\ 0\ 1]^T$$

$$\text{同理 } [(Z'')^T\ 1]^T = T * [0\ 0\ 1\ 1]^T$$

## 正向運動學(forward kinematics)—使用 D-H 法則

求正反向方程式之前，使用者可以採用一種定義機構的通則去定義機械臂的機構，我們稱這種法則叫做 **D-H(Denavit-Hartenberg)**法則[1]。D-H 法則依照兩條準則來定義機構，請見 **Fig-21**：

- (DH1) 下一轉動軸的  $X_1$  軸與目前的  $Z_0$  軸垂直。
- (DH2) 下一轉動軸的  $X_1$  軸與目前的  $Z_0$  軸相交。



D-H 定義  $Z$  軸為旋轉關節軸向或平移關節的延伸方向，並藉此二準則將關節與關節之間作連結，並產生兩個固定參數( $a$ 、 $\alpha$ )與兩組變數( $d$ 、 $\theta$ )。此四參數分別表示兩  $Z$  軸水平距離、 $Z$  軸夾角、 $X$  軸水平距離、 $X$  軸夾角，它們明確定義出關節彼此間的距離與座標上的角度差異，使用者常以簡明的表格表示，並將表格轉變為矩陣形式以利作矩陣乘法運算。矩陣乘法的目的在求正向運動學，六個矩陣乘法便能夠將機械臂基座的原點座標移動到工作點，並符合新的座標系。以 Fanuc S900W 為例[2]，請見圖 2，D-H 參數表為

Joint i	$\alpha_i$	$a_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	$\pi/2$	$a_1$	0	$\theta_1$
2	0	$a_2$	0	$\theta_2$
3	$\pi/2$	$a_3$	0	$\theta_3$
4	$-\pi/2$	0	$d_4$	$\theta_4$

5	$\pi/2$	0	0	$\theta_5$
6	0	0	$d_6$	$\theta_6$

表一

而所轉成之矩陣陣列表示如下

$$\begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & s\theta_1 & a_1c\theta_1 \\ s\theta_1 & 0 & -c\theta_1 & a_1s\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} c\theta_2 & s\theta_2 & 0 & a_2c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & a_2s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} c\theta_3 & 0 & s\theta_1 & a_3c\theta_3 \\ s\theta_3 & 0 & -c\theta_1 & a_3s\theta_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \\
 \begin{bmatrix} c\theta_4 & 0 & -s\theta_4 & 0 \\ s\theta_4 & 0 & c\theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} c\theta_5 & 0 & s\theta_5 & 0 \\ s\theta_5 & 0 & -c\theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} c\theta_6 & s\theta_6 & 0 & 0 \\ s\theta_6 & c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} *$$

相乘後可以推出與下表對應的矩陣

$$\begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & d_x \\ u_y & v_y & w_y & d_y \\ u_z & v_z & w_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

此矩陣內之  $u$ 、 $v$ 、 $w$  向量分別表示機械臂工作點上的新座標的三座標軸方向， $d$  向量表示由基座原點平移至工作點的位移量。此矩陣可將轉動量完全對應至工作點的卡氏座標系。

## 反向運動學(inverse kinematics)

反向運動學問題:給定已知工作點(P 點坐標)及工具姿態，反求 J1、J2、J3、J4、J5、J6。

1. 參考 **Fig-22**。已知  $P=[px \ py \ pz]^T$  及工具姿態  $X''=[X_x \ X_y \ X_z]^T$   
 $Y''=[Y_x \ Y_y \ Y_z]^T$   $Z''=[Z_x \ Z_y \ Z_z]^T$
2. **計算 E 點**。EP 向量方向與  $Z''$  重合

觀察 **Fig-22** 可由下式計算 E 點坐標

$$\overline{OE} = [ex, ey, ez]^T = \overline{OP} - \overline{EP} = [px, py, pz]^T - L4 * Z'' / \|Z''\|$$

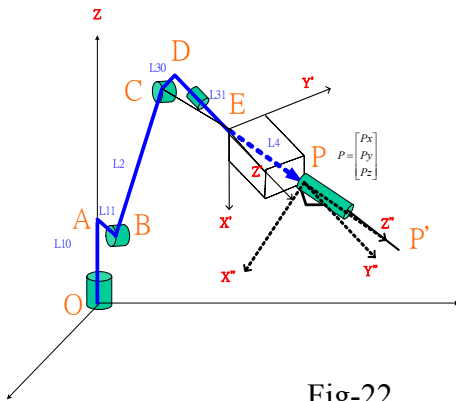


Fig-22

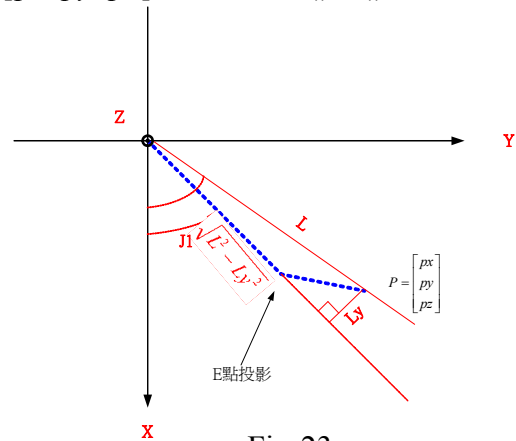


Fig-23

3. **計算 J1 (right shoulder 解)**

$$P = \begin{bmatrix} px \\ py \\ pz \end{bmatrix}$$

$$L = \sqrt{px^2 + py^2}$$

$$J1 = \tan_2^{-1}(py / px) - \sin^{-1}(Ly / L)$$

(假設  $L \gg Ly$ )

4. 計算 J1 時的 **right shoulder 及 left shoulder 解**

參考 **Fig-24, 25**，對同一個 E 點，J1 有二個解，此二解差 180 度。**Fig-24** 之 J1 是 right shoulder 解，**Fig-25** 是 left shoulder 解。

注意 J1 選擇為 right shoulder 解或 left shoulder 解也會影響 J2 及 J3 之量測方向。即注意 J2, J3 之角度正負方向定義。(Fig-24, Fig-25)



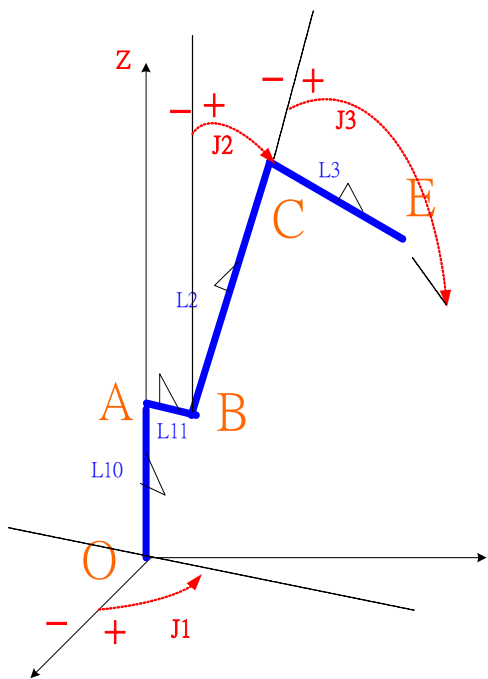


Fig-24

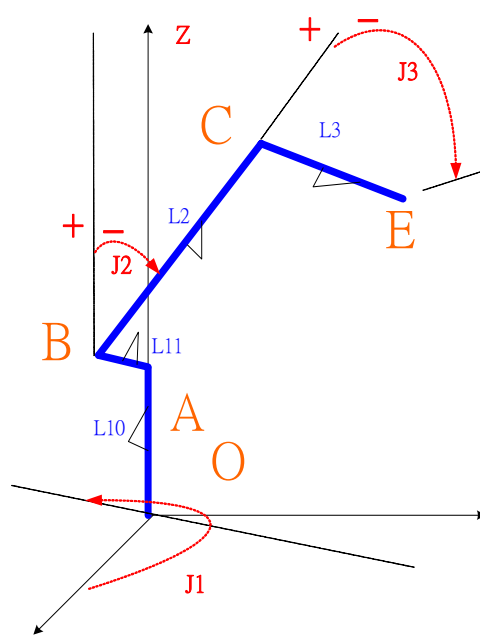


Fig-25

5. 公式

已知平面上點(x, y)距離原點(0, 0)為 r1，距離點(P, Q)為 r2，其中 r1, r2, P, Q 皆為已知，那麼 x, y 為何？

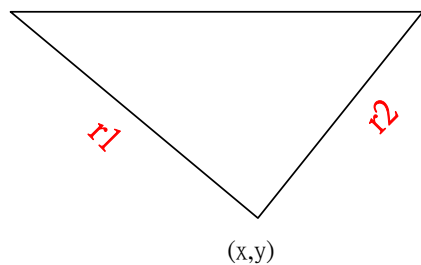


Fig-26

解:

解聯立方程式

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r1^2 & (1) \\ (x - P)^2 + (y - Q)^2 = r2^2 & (2) \end{cases}$$

化減上二式並取 tp, a, b 如下

$$tp = P^2 + Q^2 + r1^2 - r2^2$$

$$a = tp / 2P$$

$$b = -Q / P$$

可得

$$x = a + by$$

帶回(2)式得

$$(b^2 + 1)y^2 + 2aby + (a^2 - r1^2) = 0$$

令

$$A = b^2 + 1$$

$$B = 2ab$$

$$C = a^2 - r1^2$$

可解得

$$y = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

(若取 elbow up 則 y 取+)

將 y 再帶回  $x=a+by$  可得 x。

6. **解 J2, J3 (elbow up 解)**

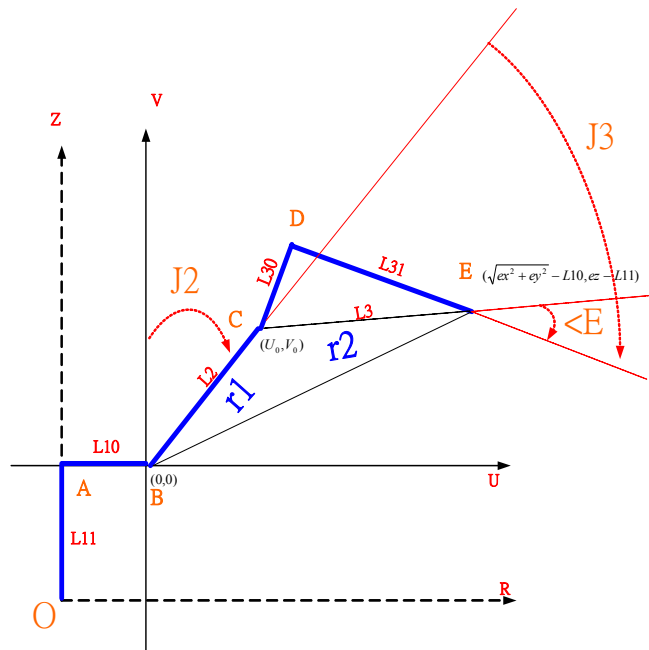


Fig-27

參考 Fig-12 取側視圖得 Fig-27，其中 OR 射線即 Fig-23 之 OR 射線。  
首先在 Fig-23 將 Z-R 坐標平移 OB 向量得到 U-V 坐標。所以 E 在 U-V 坐標上為  $[(ex^2+ey^2)^{0.5}-L10, ez-L11]$ ，B 為  $[0, 0]$ 。

**解 C 點** 在 U-V 平面上坐標  $[U0, V0]$ ，觀察  $\triangle BCE$ ，C 點距離 B 有  $r1$ ，C 點距離 E 有  $r2$ ，其中  $r1, r2$  為固定距離；又已知 E 點坐標，所以可套用前面公式

其中  $r1, r2$  為

$$r2 = L3 = \sqrt{L30^2 + L31^2}$$

$$r1 = L2$$

而 E 點坐標為 (P, Q) 如下

$$P = \sqrt{ex^2 + ey^2} - L10;$$

$$Q = ez - L11;$$

依前頁公式代入 P, Q,  $r1, r2$  可求得

$$tp = P^2 + Q^2 + r1^2 - r2^2$$

$$a = tp / 2P$$

$$b = -Q / P$$

$$A = b^2 + 1$$

$$B = 2ab$$

$$C = a^2 - r1^2$$

若  $\sqrt{B^2 - 4AC} \geq 0$  可解得

$$V_0 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

取  $V_0$  為正 (elbow up 解) 帶入  $U_0 = a + b * V_0$  可得  $U_0$

所以可得  $C_{onU-V} = [U_0, V_0]$

註: 當機械臂為 elbow up 姿態時,  $V_0$  取大值; elbow down 時取小值 (Fig-28 ,

**Fig-29)**

**解 J2.**

$$\angle CBE = \cos^{-1}((r1^2 + P^2 + Q^2 - r2^2) / 2r1 / (P^2 + Q^2)^{0.5}) ;$$

$$\angle EBC = \tan^{-1}(Q/P) ;$$

$$J2 = \pi / 2 - (\angle CBE + \angle EBC)$$

if ( $U_0 < 0$ )

$$J2 = -J2 ;$$

end

**解 J3**

$$\angle BCE = \cos^{-1}((r1^2 + r2^2 - (P^2 + Q^2)) / 2r1 / r2)$$

$$\angle E = \tan^{-1}(L30 / L31)$$

$$J3 = \pi - \angle BCE + \angle E$$

7. **elbow down/ elbow up**: 解 J2, J3 與 elbow down, elbow up 關係及與 right shoulder, left shoulder 關係

C 點是習慣上稱 elbow (肘), Fig-27 之 C 點會有兩種解, 一個為 elbow up 解 (肘在上), 另一為 elbow down 解 (肘在下); 當 C 點高於 E 點時, 為 elbow up 解 (Fig-28); C 點低於 E 點時, 為 elbow down (Fig-29)。請注意 elbow down 與 elbow up 時之 J2 及 J3 之定義方向。

J2, J3 解也會受 right shoulder, left shoulder 影響。Fig-27~29 是 right shoulder 組態; 當機械臂為 left shoulder 組態時 (Fig-25), Fig-27 之 B 點位置將如 Fig-25 所示, 之後如同前面方法解 C 點, 如高於 E 點之解為 elbow up 解。

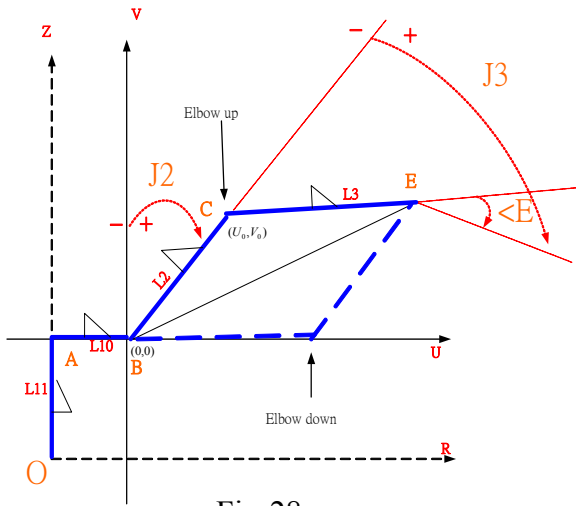


Fig-28

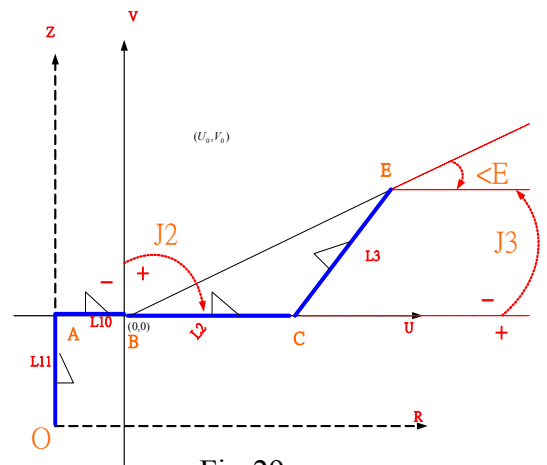


Fig-29

### 8. 解 J4, J5, J6 (Non-Flip 解)

假設  $X''$ ,  $Y''$ ,  $Z''$  為所需之姿態向量(在絕對坐標下所看到), 其形式皆為  $3 \times 1$  矩陣;

$X''_w$ ,  $Y''_w$ ,  $Z''_w$  為在腕坐標所看到之姿態向量, 其形式亦為  $3 \times 1$  矩陣。在已知  $J2, J3$  之狀況下, 可依下式利用坐標旋轉將  $X''$ ,  $Y''$ ,  $Z''$  轉成在腕坐標( $X'-Y'-Z'$ )所看到之姿態向量  $X''_w$ ,  $Y''_w$ ,  $Z''_w$

$$[X''_w \ 1]^T = Ry(-J2-J3) * Rz(-J1) * [X'' \ 1]^T ;$$

$$[Y''_w \ 1]^T = Ry(-J2-J3) * Rz(-J1) * [Y'' \ 1]^T ;$$

$$[Z''_w \ 1]^T = Ry(-J2-J3) * Rz(-J1) * [Z'' \ 1]^T ;$$

**計算 J4.**  $Z''_w$  方向同 EP 向量相同。  $Z''_w(1, 1)$  代表  $Z''_w$  在腕坐標之  $X'$  軸分量;  $Z''_w(2, 1)$  代表  $Z''_w$  在腕坐標之  $Y'$  軸分量。下式可求 J4 (Fig-30)

$$J4 = \tan^{-1}(Z''_w(2, 1)/Z''_w(1, 1));$$

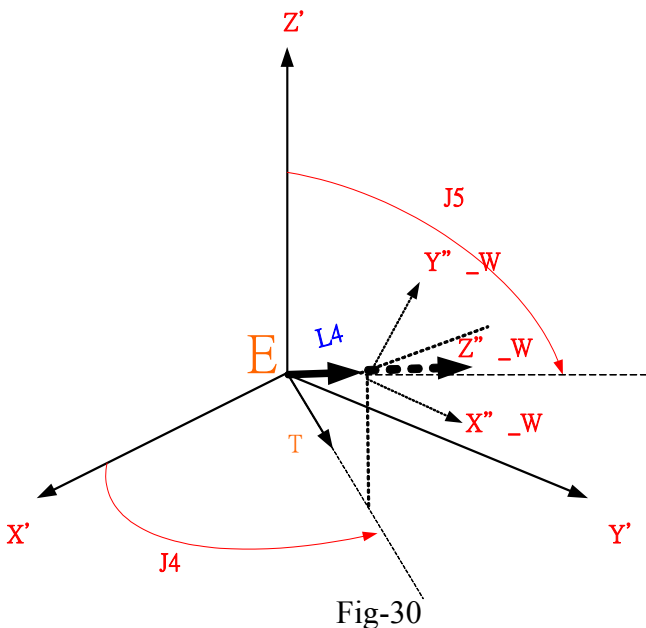


Fig-30

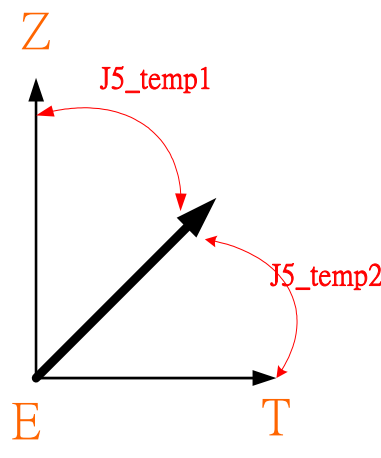


Fig-31

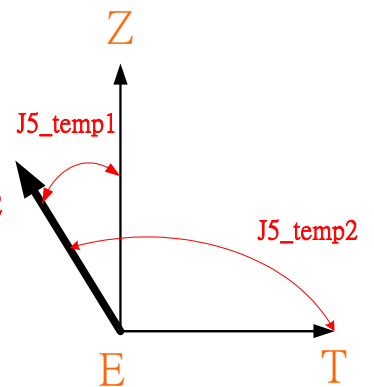


Fig-32

**計算 J5** Fig-30 中 J5 即 Z''\_w 與 Z' 夾角。求 J5 時需判斷方向，所以首先計算 Z''\_w 與 Z' 夾角 **J5\_temp1** (Fig-31, 32)

$$J5\_temp1 = \cos^{-1} \left( (Z''\_w) \cdot [0 \ 0 \ 1]^T / \|Z''\_w\| / 1 \right); \quad (\text{利用內積} \cdot)$$

再將 [1 0 0] 旋轉至 ET 方向，得 ET 向量，其長度為 1，並計算 ET 向量與 Z''\_w 夾角 **J5\_temp2**

$$ET = \text{rotz}(J4) * [1 \ 0 \ 0]^T \quad \rightarrow \text{將} [1 \ 0 \ 0] \text{旋轉至 ET 方向}$$

$$J5\_temp2 = \cos^{-1} (ET \cdot Z''\_w / \|Z''\_w\| / 1);$$

利用 J5\_temp2 判斷 J5

if(J5\_temp2 > pi/2)

$$J5 = -1 * J5\_temp1;$$

else

$$J5 = J5\_temp1;$$

end

**計算 J6** 先將 X', Y', Z' 之基底向量旋轉 J4 及 J5 (依尤拉關節定義)，可得 Wx\_r12, Wy\_r12, Wz\_r12 (Fig-33, 34)

$$Wx\_r12 = \text{rot3Z}(J4) * \text{rot3Y}(J5) * [1 \ ; \ 0 \ ; \ 0];$$

$$Wy\_r12 = \text{rot3Z}(J4) * \text{rot3Y}(J5) * [0 \ ; \ 1 \ ; \ 0];$$

$$Wz\_r12 = \text{rot3Z}(J4) * \text{rot3Y}(J5) * [0 \ ; \ 0 \ ; \ 1];$$

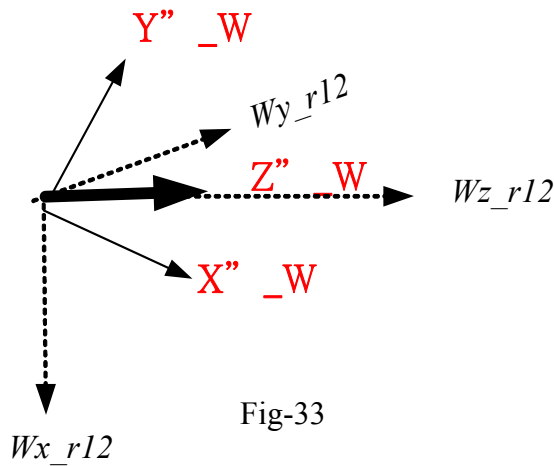


Fig-33

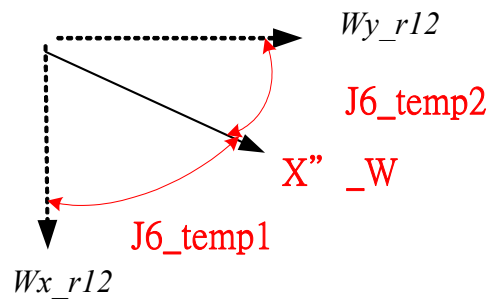


Fig-34

$$J6\_temp1 = \cos^{-1} (X''\_w \cdot Wx\_r12 / \|X''\_w\| / 1);$$

$$J6\_temp2 = \cos^{-1} (X''\_w \cdot Wy\_r12 / \|X''\_w\| / 1);$$

if(J6\_temp2 > pi/2)

$$J6 = -1 * J6\_temp1;$$

else

$$J6 = J6\_temp1;$$

end

## 9. Flip/Non-Flip 解

前面推導之  $J_4$ ,  $J_5$ ,  $J_6$  是 Non-Flip 解。事實上，對同樣的姿態向量，尤拉關節有 Non-Flip 解及 Flip 解； Fig-35 是 Non-Flip 組態， Fig-36 是 Flip 組態。若 Non-Flip 解的第四五六軸轉動量為  $J_4^*$ ,  $J_5^*$ ,  $J_6^*$ ，則 Flip 解的第四五六軸轉動量為  $J_4^* + \pi$ ,  $-J_5^*$ ,  $J_6^* + \pi$ 。

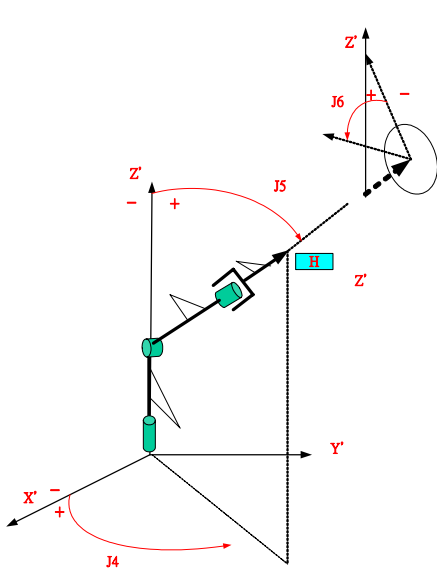


Fig-35

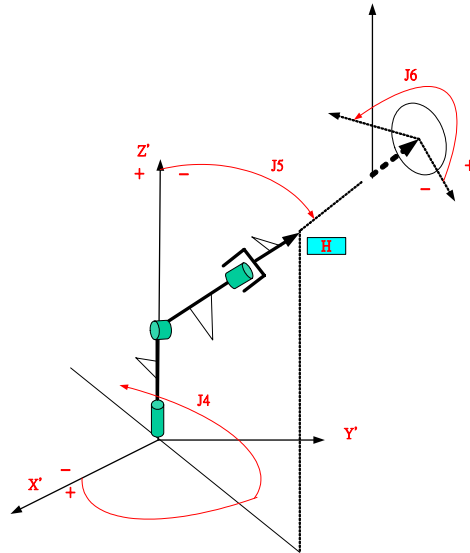


Fig-36

## 10. 總結

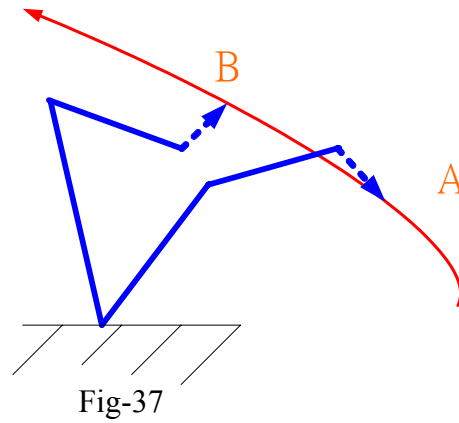
計算  $J_1 \sim 6$  時，對每一個工作點及姿態向量，有可能的八種可能解。分別是

- (Right Shoulder, Elbow Up, Non Flip)解
- (Right Shoulder, Elbow Up, Flip)解
- (Right Shoulder, Elbow Down, Non Flip)解
- (Right Shoulder, Elbow Down, Flip)解
- (Left Shoulder, Elbow Up, Non Flip)解
- (Left Shoulder, Elbow Up, Flip)解
- (Left Shoulder, Elbow Down, Non Flip)解
- (Left Shoulder, Elbow Down, Flip)解

因此要計算  $J_1 \sim 6$  時首先要確認機械臂組態為 Right Shoulder 或 Left Shoulder, Elbow Up 或 Elbow Down, Non Flip 或 Flip, 如此最終才能計算出唯一的一組解。

## 已知工作點及 J4，J5，J6 反推 J1，J2，J3

在 Fig-37 軌跡規劃中，已知起點 A 點至終點 B 之軌跡，另外起點姿態與終點姿態也為已知，中間姿態用線性插值插出。此種問題為已知工作點及 J4，J5，J6 反推 J1，J2，J3 之問題。



解法如下：

### 1. 計算 $L_x$ ， $L_y$ ， $L_z$

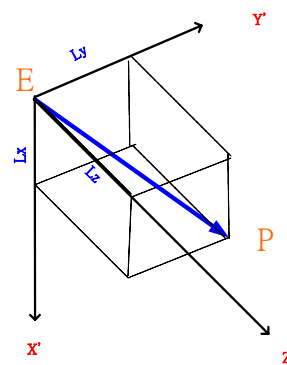
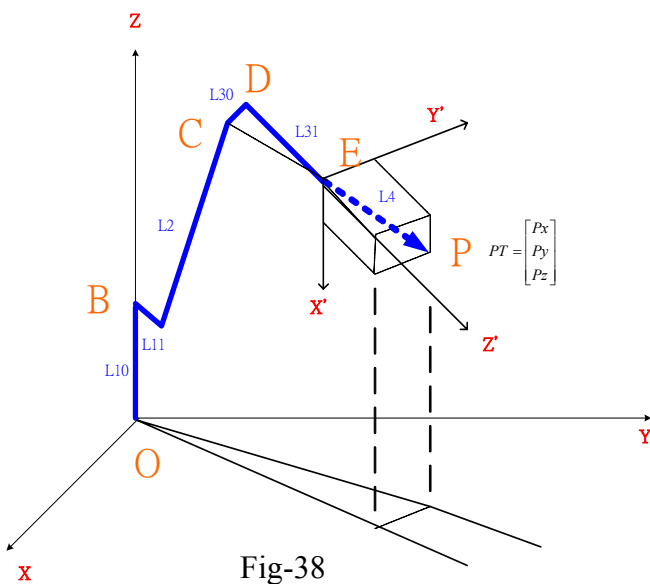


Fig-39

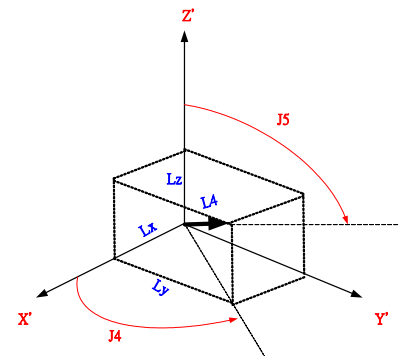


Fig-40

Fig-38 中之機械臂，J4，J5，J6 為定值，所以可固定手腕形狀，使 P 點至腕坐標各軸投影值  $L_x$ ， $L_y$ ， $L_z$  為固定值 (Fig-39)。

$$L_x = L_4 * \sin(J_5) * \cos(J_4) ;$$

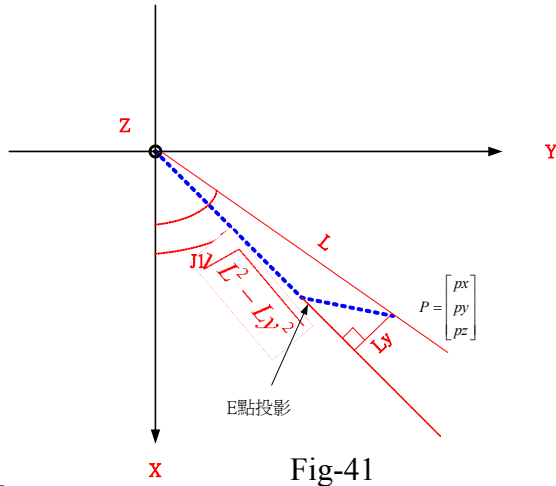
$$L_y = L_4 * \sin(J_5) * \sin(J_4) ;$$

$$L_z = L_4 * \cos(J_5) ;$$



2. **解 J1**

解法同反向運動學所述



$$PT = \begin{bmatrix} Px \\ Py \\ Pz \end{bmatrix}$$

$$L = \sqrt{Px^2 + Py^2}$$

$$J1 = \tan_2^{-1}(Py / Px) - \sin^{-1}(Ly / L)$$

(假設  $L \gg Ly$ )

### 3. 解 J2 及 J3

首先計算 C 點坐標[U0, V0]

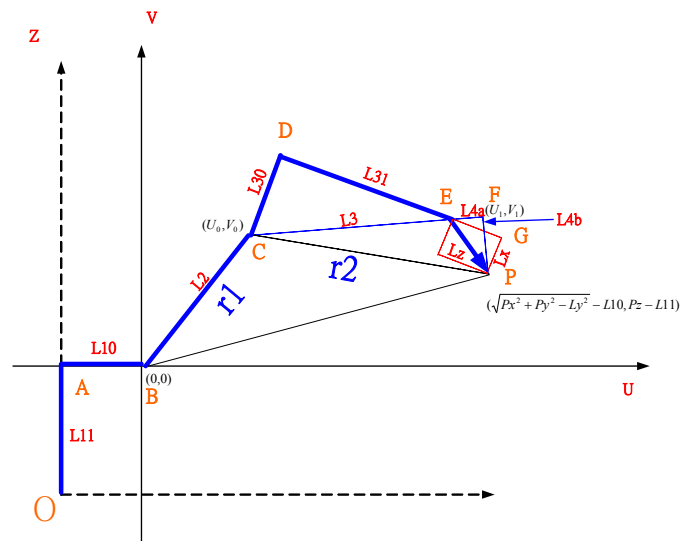


Fig-42

觀察三角形 BCP，C 點距離 B 有 r1，C 點距離 P 有 r2，其中 r1，r2 為固定距離；又已知 P 點坐標，所以可套用反向運動學中提到之公式

其中 r1，r2 為

$$r2 = \sqrt{(L30 - Lx)^2 + (L31 + Lz)^2}$$

$$r1 = L2$$

而 P 點坐標為(P, Q)如下

$$P = \sqrt{(Px^2 + Py^2 - Ly^2 - L10)}$$

$$Q = Pz - L11;$$

依公式代入 P, Q, r1, r2 可求得

$$tp = P^2 + Q^2 + r1^2 - r2^2$$

$$a = tp / 2P$$

$$b = -Q / P$$

$$A = b^2 + 1$$

$$B = 2ab$$

$$C = a^2 - r1^2$$

若  $\sqrt{B^2 - 4AC} \geq 0$  可解得

$$V_0 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

帶入  $U_0 = a + b * V_0$  可得  $U_0$

#### 4. 解 J2

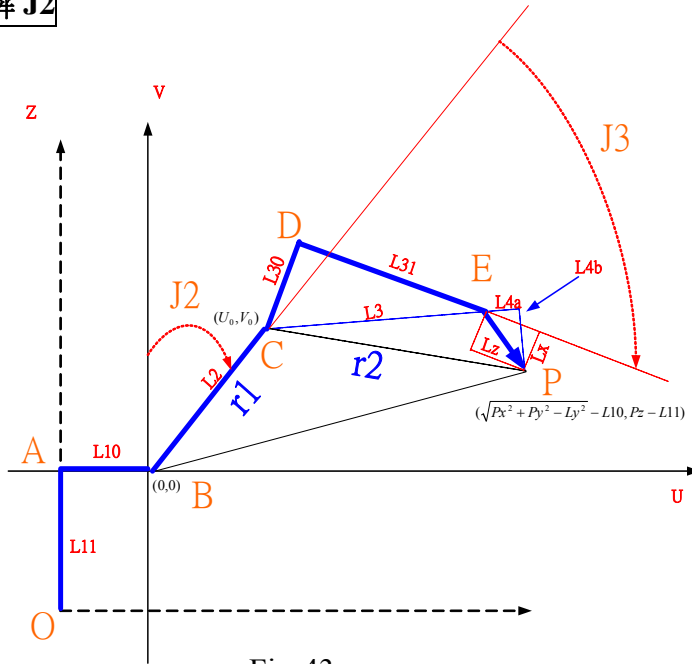


Fig-43

$$\angle CBP = \cos^{-1} \left( \frac{(r1^2 + P^2 + Q^2 - r2^2)/2/r1/(P^2 + Q^2)^{0.5}} \right) ;$$

$$\angle PBU = \tan^{-1} (Q/P) ;$$

$$J2 = \pi/2 - (\angle CBP + \angle PBU)$$

if( $U0 < 0$ )

$$J2 = -J2 ;$$

end

#### 解 J3

先計算  $L4a$   $L4b$

$$L4a = Lz * L31 / L3 - Lx * L30 / L3 ; \quad \%L4a = Lz * \cos(\angle FEG) - Lx * \sin(\angle FEG)$$

$$L4b = Lz * L30 / L3 + Lx * L31 / L3 ; \quad \%L4b = Lz * \sin(\angle FEG) + Lx * \cos(\angle FEG)$$

$$\angle BCP = \cos^{-1} \left( \frac{(r1^2 + r2^2 - (P^2 + Q^2))/2/L2/r2}{ \right) ;$$

$$J3 = \pi - \angle BCP - \tan^{-1} (L4b / (L3 + L4a)) + \tan^{-1} (L30 / L31) ;$$

## 奇異點 (singularity) 問題

### 四五六軸奇異點

當第四與第六軸成一直線時，有一軸為多餘軸，所以當  $J5$  為 0 度時，第四與第六軸成一直線此時為 **singular**。在 **singular** 點時，計算四五六軸之模形只需降次。然而更嚴重還在後頭，即 **singular band** 問題。**singular band** 定義在  $J5$  很小時，一般是在 10 度以內。

觀察 **Fig-44**，當在腕中心所看到的空間軌跡點自 A 移至 B，此時  $J4$  的角度由  $J4A$  改變為  $J4B$ ；當圓很小時 ( $J5$  10 度以內)，自 A 移動至 B 一小段距離就會造成  $J4$  角度的巨大變化，於是第四軸產生暴走現象。

解決此問題有二種方法，第一種是當進入 **singular band** 時將進給速率大幅降低。第二種是當進入 **singular band** 強迫指定姿態以避免  $J5$  過小。參考 **Fig-45**，當原規劃路徑進入 **singular band** 時，自進入點 A 改走虛線圓弧至離開點 B，此時強迫指定姿態 (即強迫指定  $J4$ 、 $J5$ 、 $J6$ )，並根前節所述“已知工作點及  $J4$ 、 $J5$ 、 $J6$  反推  $J1$ 、 $J2$ 、 $J3$ ”。虛線圓弧的意義在於，固定  $J5$  角度，保證路徑離  $Z'$  有一定半徑距離，從而避免第四軸過速問題。

第一、二種方法都可保證空間軌跡不變；第一種方法會大幅影響進給率 (工具姿態不需改變)；第二種方法會較第一種極大的提升了進給率，但需改工具姿態。

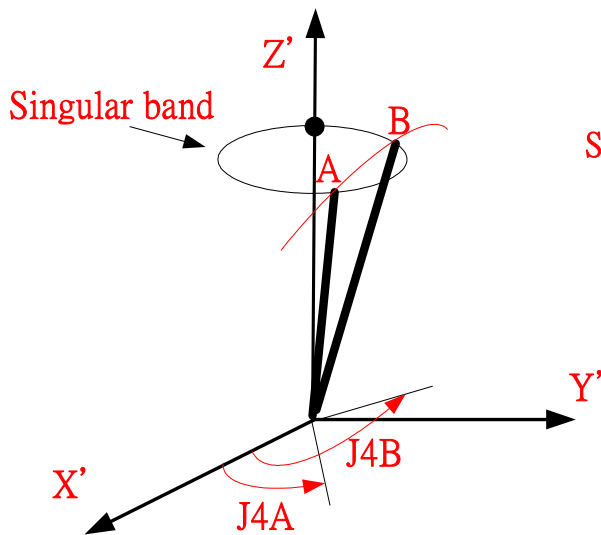


Fig-44

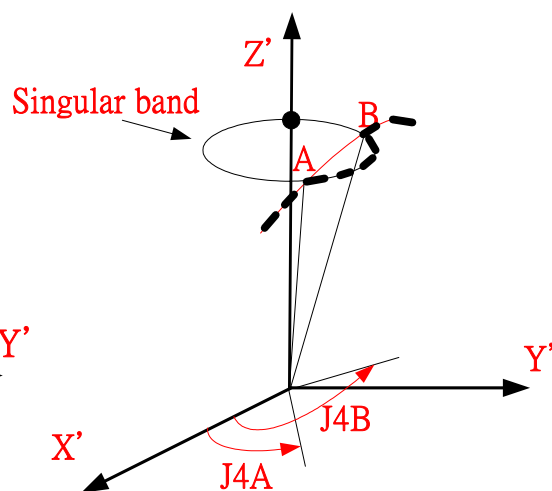


Fig-45

## 結論

前面介紹了六軸機械臂的運動學，要理想控制六軸機械臂尚需機械臂的動力學與機械臂的控制理論，限於篇幅在這裏無法多述，讀者可參閱相關書籍。

這新的世紀裡新一代的智慧型機器人可能取代傳統的機器人，機器人的廣泛參與也將悄悄地改變我們的社會結構和生存環境，甚至會改變我們的傳統觀念和思維方式。當然大量出現的機器人在為人類服務的同時也會帶來一嶄新的社會問題，需要我們人類去不斷解決這樣的問題，機器人畢竟是人類使用的一種工具，即使人工智慧技術得到了很大的發展，但要超越人類本身只是人類的夢想。

## 參考文獻

- [1]Robot Dynamics and Control, Mark W. Spong, M. Vidyasagar, 1989.1, Wiley
- [2]Robot Analysis, Lung-Wen Tsai, 1999, Wiley
- [3]Document of Robotics Toolbox for Matlab, Peter I. Corke, 2001.4, CSIRO
- [4]香港理工大學工業中心網頁