



運動學/反運動學 控制硬體IP設計開發

Development of the Control Hardware IP
for Kinematics/Inverse Kinematics

龔應時

南台科技大學
電機工程系
教授

吳敏光

南台科技大學
機械工程系
副教授

鍾子涵

南台科技大學
電機工程系
碩士班研究生

李欣泓

工研院機械所
智慧機械技術組
機電控制整合部

陳文泉

工研院機械所
智慧機械技術組
機電控制整合部
經理

關鍵詞(Keywords)

- 六軸垂直關節型機械手臂
six-axis articulated robot
- 運動學/反運動學
kinematics / inverse kinematics
- 硬體智材
hardware intellectual property

摘要(Abstract)

執行機械手臂運動控制時，常需要複雜的運動學與反運動學之計算，然而此演算法在軟體執行時，需要較多的 CPU 時間，因此影響機械手臂的運動速度。針對此問題，本案旨在於發展運動

學與反運動學之控制硬體 IP(智材)，以期能在數個微秒(μs)時間內完成計算，以提升機械手臂的運動性能。本文首先推導六軸垂直關節型機械手臂運動學與反運動學之演算法；接著再以 VHDL (Very high speed IC Hardware Description Language)來描述其電路行為。為了證實所發展運動學與反運動學控制硬體 IP 之正確性，將結合 ModelSim 及 SimuLink 之環境來共同模擬。在 ModelSim 將執行運動學與反運動學之控制硬體 IP，而在 SimuLink 將提供輸入之測試訊號及顯示輸出之量測訊號。

The implementation of robot motion control often requires complex kinematics and inverse kinematics calculations. However, this algorithm requires more CPU time in the software, and may affect robot movement speed. To solve this problem,



this article aims at the development of kinematics and inverse kinematics control hardware IP (intellectual property) in order to complete the calculations within several microseconds and ultimately enhance the performance of the robot movement. In this article, firstly, a six-axis articulated robot kinematics and inverse kinematics algorithm is derived. Secondly the circuit behavior using VHDL (Very high speed IC Hardware Description Language) is described. Finally, in order to confirm the validity of the developed kinematics and inverse kinematics IP, co-simulation using ModelSim and SimuLink is applied. ModelSim is used to run the kinematics and inverse kinematics IP, and the Simulink model is taken as a test bench that generates stimulus to ModelSim and displays the output results.

1. 簡介

在機械手臂之運動控制中[1]，常見的有點對點運動與特定軌跡運動。點對點運動可以經由預先教導來達成，因此手臂位置與各軸馬達旋轉角度之相對轉換量為已知。然而特定軌跡運動或者非經由預先教導之位置，機械手臂須由欲到達之空間位置來推算各軸馬達之旋轉角度，因此必須計算反運動學[2-3]。但是機械手臂反運動學之計算相當繁雜，以一般微處理器而言，軟體 CPU 計算常需要數個毫秒(ms)以上。因此計算反運動學公式成為機械手臂運動之瓶頸，也是值得挑戰之

處。

隨著半導體製造之進步，各種性能優異之晶片不斷的被開發完成，如數位訊號處理器(DSP)晶片、現場可程式邏輯閘陣列(FPGA)晶片、微控制器(μ C)晶片等，而這些晶片中常具有可程式規劃設計的功能及高效能之數值計算能力，可提供各行業發展，設計適合該行業之應用軟硬體，以提昇其產品與設備之品質及功能，使之達到小型化、網路化、低成本、省元件、智慧型與高性能的目的。其中 FPGA 具有硬體可程式化、快速計算能力、快速時間推到市場、短的設計週期、嵌入式微處理器、低電力消耗及高密度容量，因此極適合數位系統之實現，在工業控制及機器人運動控制上應用極為廣泛[4]。

近年來，藉由電子設計自動化(Electronic Design Automation, EDA)模擬連結器之共同模擬系統，逐漸被使用來驗證 Verilog 及 VHDL 程式之正確性與有效性[5]。EDA 模擬連結器提供 MATLAB/Simulink 及 HDL 模擬器(ModelSim)之共同模擬介面，利用此模擬介面便可以在 Simulink 之環境下，驗證 VHDL、Verilog 及混合語言之程式正確性。因此，EDA 模擬連結器可藉由 MATLAB 程式及 Simulink 模式產生訊號給 HDL 模擬器，然後接收並分析其響應值。因此，本案中將應用 EDA 模擬連結器，結合 ModelSim 及 Simulink 共同模擬六軸垂直關節型機械手臂(如圖 1)運動學與反運動學之控制硬體 IP。在 Simulink 的環境下，將產生輸出入值與 ModelSim 連接；在 ModelSim 內將執行機械手臂運動學與反運動學之控制硬體 IP，ModelSim 發展之元件將以 VHDL 程式撰寫。



2. 六軸垂直關節型機械手臂之運動學/反運動學推導

2.1 六軸垂直關節型機械手臂運動學推導

已知一般機器手臂各軸之轉角，進而計算手腕末端效應器於空間中之位置及方向，稱為機械手臂之運動學。推導之方式先分別在每一個連桿上貼附一個座標系統，如圖 1 所示，以連桿 0 代表大地，其座標為 $x_0y_0z_0$ ，座標 $x_1y_1z_1$ 至 $x_6y_6z_6$ 則依序貼附於底座、上/下臂及手腕的 3 個連桿，腕部最後一個連桿的座標為 $x_6y_6z_6$ ，其原點位於手腕末端圓盤表面中心，夾爪或工具可固定在此圓盤上。

座標貼附的原則採用 D-H 規則(Denavit and Hartenberg's convention)，參考圖 2，其規則如下所述：

1. 連桿 n ($n = 0, 1 \dots 6$)座標系統的 z_n 軸位於連接連桿 n 與連桿 $n+1$ 的關節上。

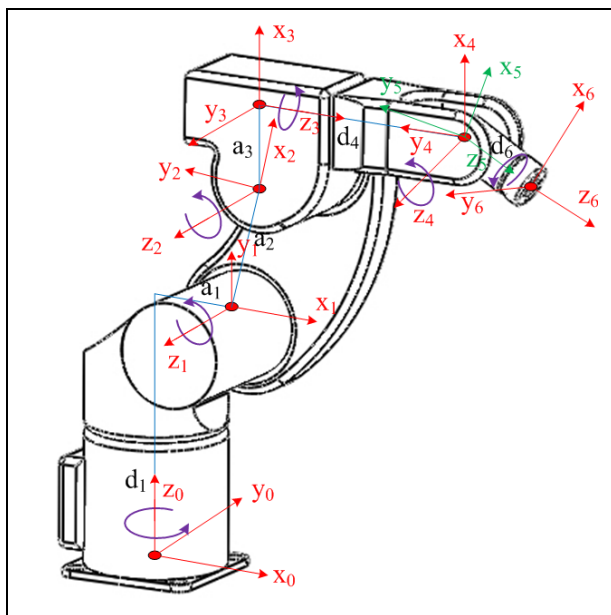


圖 1 六軸垂直關節型機械手臂

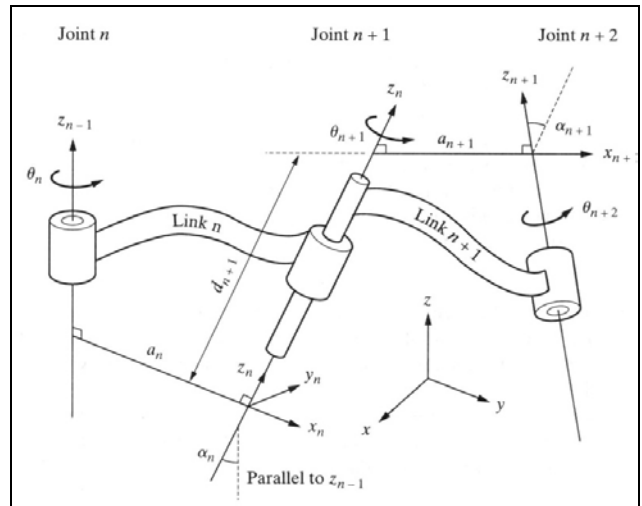


圖 2 D-H 規則

2. x_n 軸位於連接 z_{n-1} 軸與 z_n 軸的公垂線上，方向由 z_{n-1} 軸指向 z_n 軸。
3. 一經選定 z_n 軸與 x_n 軸， y_n 軸的方向由右手定則決定。

若有一點 P 附於連桿 $n+1$ 上，相對於 $x_{n+1}y_{n+1}z_{n+1}$ 座標系統的座標值以向量 ${}^{n+1}\mathbf{P}$ 表示，則此 P 點相對於前一個連桿座標 $x_ny_nz_n$ 的座標值 ${}^n\mathbf{P}$ 為

$${}^n\mathbf{P} = \mathbf{A}_{n+1} \times {}^{n+1}\mathbf{P} \quad (2.1)$$

其中， \mathbf{A}_{n+1} 為座標轉換矩陣， \mathbf{A}_{n+1}

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta_{n+1}) - \sin(\theta_{n+1})\cos(\alpha_{n+1}) & \sin(\theta_{n+1})\sin(\alpha_{n+1}) & a_{n+1}\cos(\theta_{n+1}) \\ \sin(\theta_{n+1}) & \cos(\theta_{n+1})\cos(\alpha_{n+1}) - \cos(\theta_{n+1})\sin(\alpha_{n+1}) & a_{n+1}\sin(\theta_{n+1}) \\ 0 & \sin(\alpha_{n+1}) & \cos(\alpha_{n+1}) & d_{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

θ_{n+1} 、 d_{n+1} 、 a_{n+1} 、 α_{n+1} 為兩相鄰連桿，亦即連桿



n 與連桿 $n+1$ 之間相對位置的幾何尺寸參數。 d_{n+1} 為 x_n 至 x_{n+1} 之間沿著 z_n 軸方向的位移。若從 z_n 軸的方向從上向下投影， θ_{n+1} 為 x_n 與 x_{n+1} 軸的夾角。 a_{n+1} 為 z_n 至 z_{n+1} 之間沿著 x_{n+1} 軸方向的位移。從相鄰兩軸之公垂線的方向投影在一個平面上， α_{n+1} 為 z_n 與 z_{n+1} 軸的夾角。以圖 1 之機械手臂而言， θ_{n+1} 為變數，隨著兩相鄰連桿相對轉動而改變，其餘參數為機械手臂之尺寸參數，視機械手臂而定，其參數值列於表 1：

表 1

關節	α	a	d	θ
1	$\pi/2$	a_1	d_1	θ_1
2	0	a_2	0	θ_2
3	$\pi/2$	a_3	0	θ_3
4	$-\pi/2$	0	d_4	θ_4
5	$\pi/2$	0	0	θ_5
6	0	0	d_6	θ_6

將以上的值代入式(2.2)，可得相鄰兩連桿之座標轉換矩陣 \mathbf{A}_1 、 \mathbf{A}_2 、 \mathbf{A}_3 、 \mathbf{A}_4 、 \mathbf{A}_5 及 \mathbf{A}_6 。

工具的端點是機械手臂欲控制路徑的點，假設其座標值 ${}^6\mathbf{P} = [tool_x \ tool_y \ tool_z \ 1]^T$ ，其中左上方之上標 6 表示 \mathbf{P} 點相對於 $x_6y_6z_6$ 的座標。經由一連串的轉換，可求得 \mathbf{P} 點相對於大地座標的座標值為

$${}^0\mathbf{P} = [end_x \ end_y \ end_z \ 1]^T = \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3 \times \mathbf{A}_4 \times \mathbf{A}_5 \times \mathbf{A}_6 \times {}^6\mathbf{P} = \mathbf{A} \times {}^6\mathbf{P} \quad (2.3)$$

其中 $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3 \times \mathbf{A}_4 \times \mathbf{A}_5 \times \mathbf{A}_6$ ，為工具至大地的座標轉換矩陣。假設

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & q_x \\ u_y & v_y & w_y & q_y \\ u_z & v_z & w_z & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

將(2.3)式之 6 個矩陣相乘，可得矩陣 \mathbf{A} 之各元素值如下：

$$u_x = \cos(\theta_1)t_1 + \sin(\theta_1)t_2 \quad (2.4)$$

$$u_y = \sin(\theta_1)t_1 - \cos(\theta_1)t_2 \quad (2.5)$$

$$u_z = \sin(\theta_2 + \theta_3)t_0 + \cos(\theta_2 + \theta_3)\sin(\theta_5)\cos(\theta_6) \quad (2.6)$$

$$v_x = \cos(\theta_1)t_4 + \sin(\theta_1)t_5 \quad (2.7)$$

$$v_y = \sin(\theta_1)t_4 - \cos(\theta_1)t_5 \quad (2.8)$$

$$v_z = -\sin(\theta_2 + \theta_3)t_3 - \cos(\theta_2 + \theta_3)\sin(\theta_5)\sin(\theta_6) \quad (2.9)$$

$$w_x = \cos(\theta_1)t_6 + \sin(\theta_1)\sin(\theta_4)\sin(\theta_5) \quad (2.10)$$

$$w_y = \sin(\theta_1)t_6 - \cos(\theta_1)\sin(\theta_4)\sin(\theta_5) \quad (2.11)$$

$$w_z = \sin(\theta_2 + \theta_3)\cos(\theta_4)\sin(\theta_5) - \cos(\theta_2 + \theta_3)\cos(\theta_5) \quad (2.12)$$

$$q_x = \cos(\theta_1)t_7 + d_6 \sin(\theta_1)\sin(\theta_4)\sin(\theta_5) \quad (2.13)$$

$$q_y = \sin(\theta_1)t_7 - d_6 \cos(\theta_1)\sin(\theta_4)\sin(\theta_5) \quad (2.14)$$



$$q_z = d_1 + a_2 \sin(\theta_2) + a_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) - d_4 \cos(\theta_2 + \theta_3) + d_6 w_z \quad \text{上的轉換矩陣求得：} \quad (2.15)$$

其中

$$t_0 = \cos(\theta_4) \cos(\theta_5) \cos(\theta_6) - \sin(\theta_4) \sin(\theta_6) \quad (2.20)$$

$$t_1 = \cos(\theta_2 + \theta_3) t_0 - \sin(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_5) \cos(\theta_6) \quad (2.21)$$

$$t_2 = \sin(\theta_4) \cos(\theta_5) \cos(\theta_6) + \cos(\theta_4) \sin(\theta_6)$$

$$t_3 = \cos(\theta_4) \cos(\theta_5) \sin(\theta_6) + \sin(\theta_4) \cos(\theta_6)$$

$$t_4 = -\cos(\theta_2 + \theta_3) t_3 + \sin(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_5) \sin(\theta_6)$$

$$t_5 = -\sin(\theta_4) \cos(\theta_5) \sin(\theta_6) + \cos(\theta_4) \cos(\theta_6)$$

$$t_6 = \cos(\theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_4) \sin(\theta_5) + \sin(\theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_5)$$

$$t_7 = a_1 + a_2 \cos(\theta_2) + a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + d_4 \sin(\theta_2 + \theta_3) + d_6 t_6$$

將以上的結果代入 ${}^0\mathbf{P} = \mathbf{A} \times {}^6\mathbf{P}$ 可得順向運動學之工具端點解為

$$end_x = u_x tool_x + v_x tool_y + w_x tool_z + q_x \quad (2.16)$$

$$end_y = u_y tool_x + v_y tool_y + w_y tool_z + q_y \quad (2.17)$$

$$end_z = u_z tool_x + v_z tool_y + w_z tool_z + q_z \quad (2.18)$$

而工具圓盤相對於大地座標的方向，也可以由以

$${}^0\mathbf{x}_6 = [u_x \quad u_y \quad u_z \quad 1]^T \quad (2.19)$$

$${}^0\mathbf{y}_6 = [v_x \quad v_y \quad v_z \quad 1]^T \quad (2.20)$$

$${}^0\mathbf{z}_6 = [w_x \quad w_y \quad w_z \quad 1]^T \quad (2.21)$$

其中 $\mathbf{u} = [u_x \ u_y \ u_z]^T$ 、 $\mathbf{v} = [v_x \ v_y \ v_z]^T$ 、 $\mathbf{w} = [w_x \ w_y \ w_z]^T$ 為工具圓盤的 3 個座標軸相對於大地座標的單位向量，長度均為 1 且相互垂直，因此 9 個變數只有 3 個自由度，一般常以 3 個角度來表示方向，如 R-P-Y 角或 Euler 角，其值亦可由以上之矩陣 \mathbf{A} 求出。

2.2 六軸垂直關節型機械手臂反運動學推導

已知工具的端點相對於大地的座標 ${}^0\mathbf{P} = [end_x \ end_y \ end_z \ 1]^T$ 及工具的方向 \mathbf{u} 、 \mathbf{v} 、 \mathbf{w} ，欲求各關節的轉角 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 、 θ_4 、 θ_5 、 θ_6 ，稱為機械手臂之反運動學。此機器人腕部的 3 個旋轉軸 z_4 、 z_5 、 z_6 相交於一點，假設此點稱為 C 點，C 點位於工具座標 z_6 軸負方向距離為 d_6 處，因此 C 點相對於大地的座標可由以下的算式求出：

$${}^0\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} end_x \\ end_y \\ end_z \\ 1 \end{bmatrix} - tool_x \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ 1 \end{bmatrix} - tool_y \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 1 \end{bmatrix} - tool_z \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \\ 1 \end{bmatrix} - d_6 \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$



若從底座與上/下臂看C點，它位於第3個座標系統 z_3 軸的正方向，距離為 d_4 處，C點相對於大地的座標值為 ${}^0\mathbf{C} = \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3 \times [0 \ 0 \ d_4 \ 1]^T$ 。因此，

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{C} &= [c_x \ c_y \ c_z \ 1]^T \\ &= \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3 \times [0 \ 0 \ d_4 \ 1]^T \end{aligned} \quad (2.23)$$

${}^0\mathbf{C}$ 的值 c_x 、 c_y 、 c_z 可由式(2.22)求出，因此式(2.23)只含有3個未知數，亦即前3軸的轉角 θ_1 、 θ_2 與 θ_3 。由式(2.23)可知

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1^{-1} \times [c_x \ c_y \ c_z \ 1]^T \\ = \mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3 \times [0 \ 0 \ d_4 \ 1]^T \end{aligned} \quad (2.24)$$

在式子兩邊的矩陣相乘後可以列出以下3個等式：

$$c_x \cos(\theta_1) + c_y \sin(\theta_1) - a_1 = a_2 \cos(\theta_2) + a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + d_4 \sin(\theta_2 + \theta_3) \quad (2.25)$$

$$c_z - d_1 = a_2 \sin(\theta_2) + a_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) - d_4 \cos(\theta_2 + \theta_3) \quad (2.26)$$

$$c_x \sin(\theta_1) - c_y \cos(\theta_1) = 0 \quad (2.27)$$

由式(2.27)可解出 θ_1 為

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{c_y}{c_x}\right) \text{ 或 } \theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{c_y}{c_x}\right) + \pi \quad (2.28)$$

θ_1 有兩組解，分別代表底座朝向前方與底座朝向

後方。將(2.25)、(2.26)及(2.27)之式子等號兩側各取平方相加可得到

$$2a_2d_4\sin(\theta_3) + 2a_2a_3\cos(\theta_3) = K \quad (2.29)$$

其中 $K = c_x^2 + c_y^2 + (c_z - d_1)^2 - 2c_xa_1\cos(\theta_1) - 2c_ya_1\sin(\theta_1) + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - d_4^2$ 。式(2.29)可寫成

$$\begin{aligned} \cos(\theta_3 - \alpha) &= \frac{K}{2a_2\sqrt{a_3^2 + d_4^2}} \text{ 其中} \\ \alpha &= \tan^{-1}\left(\frac{d_4}{a_3}\right) \end{aligned} \quad (2.30)$$

由式(2.30)可得到

$$\begin{aligned} \theta_3 &= \alpha + \cos^{-1}\left(\frac{K}{2a_2\sqrt{a_3^2 + d_4^2}}\right) \text{ 或} \\ \theta_3 &= \alpha - \cos^{-1}\left(\frac{K}{2a_2\sqrt{a_3^2 + d_4^2}}\right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

由上式可知 θ_3 有兩組解答，分別表示手肘向上彎曲與向下彎曲之組態。求得 θ_1 與 θ_3 後，將式(2.25)及(2.26)之 $\cos(\theta_2 + \theta_3)$ 及 $\sin(\theta_2 + \theta_3)$ 展開並加以整理，可以得到如下之聯立方程組：

$$u_1\cos(\theta_2) + v_1\sin(\theta_2) = r_1 \quad (2.32)$$

$$u_2\cos(\theta_2) + v_2\sin(\theta_2) = r_2 \quad (2.33)$$

其中



$$u_1 = a_2 + a_3 \cos(\theta_3) + d_4 \sin(\theta_3)$$

$$v_1 = -a_3 \sin(\theta_3) + d_4 \cos(\theta_3)$$

$$r_1 = c_x \cos(\theta_1) + c_y \sin(\theta_1) - a_1$$

$$u_2 = a_3 \sin(\theta_3) - d_4 \cos(\theta_3)$$

$$v_2 = a_2 + a_3 \cos(\theta_3) + d_4 \sin(\theta_3)$$

$$r_2 = c_z - d_1$$

解式(2.32)及(2.33)之聯立方程組可求得 $\sin(\theta_2)$ 及 $\cos(\theta_2)$ ，並可依此而解出 θ_2 。

欲求後 3 個關節之轉角 θ_4 、 θ_5 、 θ_6 ，可從它們的 3 個座標系統之轉換矩陣解出。因為 $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3 \times \mathbf{A}_4 \times \mathbf{A}_5 \times \mathbf{A}_6$ ，所以

$$\mathbf{A}_4 \times \mathbf{A}_5 \times \mathbf{A}_6 = (\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3)^{-1} \times \mathbf{A} \quad (2.34)$$

在求出 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 後，式(2.34)之等號右側所有數值均為已知，等號左側則含有 θ_4 、 θ_5 、 θ_6 等 3 個未知數，將式(2.34)之矩陣相乘並加以整理，由元素(3,3)可求得 θ_5 ：

$$\theta_5 = \cos^{-1}(C_1 S_{23} w_x + S_1 S_{23} w_y - C_{23} w_z) \text{ 或 } \theta_5 = -\cos^{-1}(C_1 S_{23} w_x + S_1 S_{23} w_y - C_{23} w_z) \quad (2.35)$$

其中 C_1 表示 $\cos(\theta_1)$ ，而 S_{23} 表示 $\sin(\theta_2 + \theta_3)$ ，依此類推。求出 θ_5 後，由元素(1,3)及(2,3)可知

$$\cos(\theta_4) = \frac{C_1 C_{23} w_x + S_1 C_{23} w_y + S_{23} w_z}{S_5} \quad (2.36)$$

$$\sin(\theta_4) = \frac{S_1 w_x - C_1 w_y}{S_5} \quad (2.37)$$

由元素(3,1)及(3,2)可知

$$\cos(\theta_6) = -\frac{C_1 S_{23} u_x + S_1 S_{23} u_y - C_{23} u_z}{S_5} \quad (2.38)$$

$$\sin(\theta_6) = \frac{C_1 S_{23} v_x + S_1 S_{23} v_y - C_{23} v_z}{S_5} \quad (2.39)$$

由(2.36)至(2.39)可解出 θ_4 及 θ_6 。

在不考慮連桿機構可能產生干涉的狀態下，底座可以得到兩組解答，上/下臂有兩組，腕部也有兩組解答，亦即共有 8 組不同的轉軸角度組態可得到相同的工具位置與方向。但實際上因為機械元件尺寸及互相干涉的限制，某些組態不可能發生。

3. 運動學/反運動學中常用函數之硬體語言程式設計

本節主要針對運動學/反運動學中常用函數，如 \sin 函數、 \cos 函數、 acos 函數及 atan2 函數等。常用函數之硬體設計說明如下：

3.1 \sin 函數及 \cos 函數

計算 $y_1 = \sin(\theta + \Delta\theta)$ 及 $y_2 = \cos(\theta + \Delta\theta)$ 時，其中 $\theta + \Delta\theta$ 採 16 bits Q7 格式。整數部份(θ)為 9 bits，範



圍值為 0~511 所以可以函蓋 0 度~359 度，解析度為 1 度。小數部份($\Delta\theta$)為 7 bits，範圍值為 0 度~0.9922 度，解析度為 0.0078 度。 $\theta+\Delta\theta$ 之輸入值如 000000100 1000000 表示 4.5 度。所以當需計算 y_1 及 y_2 值時，可依三角函數計算，將它展開如下式

$$y_1 = \sin(\theta + \Delta\theta) = \sin(\theta) \cos(\Delta\theta) + \cos(\theta) \sin(\Delta\theta) \quad (3.1)$$

$$y_2 = \cos(\theta + \Delta\theta) = \cos(\theta) \cos(\Delta\theta) - \sin(\theta) \sin(\Delta\theta) \quad (3.2)$$

在硬體程式設計中，先建立四個 table： $\sin(\theta)$ 、 $\cos(\theta)$ 、 $\sin(\Delta\theta)$ 、 $\cos(\Delta\theta)$ 之表格。其中 $\sin(\theta)$ 、 $\cos(\theta)$ 之表格建 360 筆(0~359)，每筆資料 24 bits Q23，而 $\sin(\Delta\theta)$ 、 $\cos(\Delta\theta)$ 之表格建 128 筆(0~127)，每筆資料 24 bits Q23，而 $\sin(\Delta\theta)$ 、 $\cos(\Delta\theta)$ 之表格建立 128 筆資料(0~127)，每筆資料為 24 bits Q23，此四表格將應用於計算 $\sin(\theta+\Delta\theta)$ 及 $\cos(\theta+\Delta\theta)$ ，運算結果再移回 16 bits Q15 輸出。以計算 cosine 函數為例，在硬體實現上應用有限狀態機器法(FSM)來計算，如圖 3 所示。先查四個表格，再以二個乘法器及一個加法器計算其值，總共需 5 個步驟。

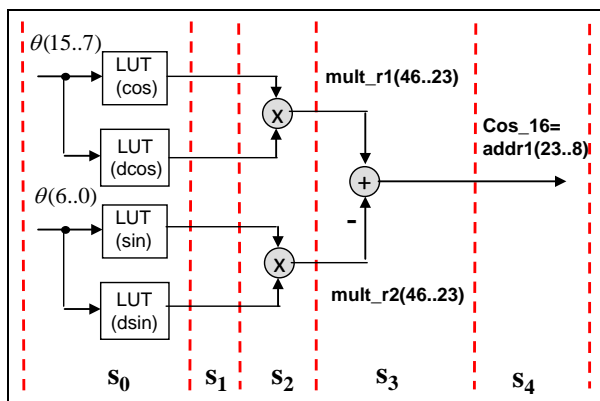


圖 3 以有限狀態機器法(FSM)計算 cosine 函數

3.2 atant2 函數

atant2 函數之計算公式如下：

$$\theta = a \tan 2(y/x) \quad (3.3)$$

其中輸入為 x 及 y ，而輸出為 θ 。計算 atant2 函數分兩個步驟：

■ 步驟一：

先計算 $\theta_1 = \tan^{-1}(x)$ ，且其輸入值範圍為 $1 \leq x \leq 0$ (或其輸出值範圍為 $45^\circ \leq \theta_1 \leq 0^\circ$)。接著，應用泰勒展開式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4 + \frac{f^{(5)}(x_0)}{5!}(x - x_0)^5 + \dots \quad (3.4)$$

來計算 $\theta_1 = f(x) = \tan^{-1}(x)$ 。此處僅展開至第四項即足夠，

$$f(x) \cong a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 \quad (3.5)$$

其中

$$a_0 = f(x_0) = \tan^{-1}(x_0) \quad (3.6)$$

$$a_1 = f'(x_0) = \frac{1}{1+x_0^2} \quad (3.7)$$



$$a_2 = f''(x_0) = \frac{-2x_0}{(1+x_0^2)^2} \quad (3.8)$$

$$a_3 = f^{(3)}(x_0) = \frac{-2+6x_0^2}{(1+x_0^2)^3} \quad (3.9)$$

■ 步驟二：

在計算 $\tan^{-1}(x)$ 之後，將進一步擴展計算 $\theta = a \tan 2(y/x)$ 使其輸出值適合 $-180^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ，如圖 4 所示。

圖 5 (a) 為計算 $a \tan 2(y/x)$ 函數之硬體實現方塊圖。圖中，輸出入資料各自為 16 位元 Q15 格式及 32 位元 Q15 格式。它包括一個具有 FSM 法設計架構之主電路及兩個元件，可以計算除法器及 $\tan^{-1}(x)$ 函數。除法器元件為 32 位元 Q15 格式且具有 2 的補數之運算，而其輸出值為 16 位元 Q15 格式。 $\tan^{-1}(x)$ 函數計算元件之輸出入值皆屬於 16 位元 Q15 格式。圖 5 (b) 為以 FSM 法設計 $\tan^{-1}(x)$ 函數之多項式計算，此設計同時僅使用兩個乘法器及

一個加法器，共使用 7 個步驟可完成所有的計算，步驟 $s_0 \sim s_1$ 執行查 5 個表格； $s_2 \sim s_6$ 執行多項式計算。整體而言，計算 $a \tan 2(y/x)$ 函數，總共需 16 個步驟，若以頻率 50 MHz 之 FPGA 晶片而言，每個步驟約耗時 20 ns，因此推估總共計算時間約為 320 ns。

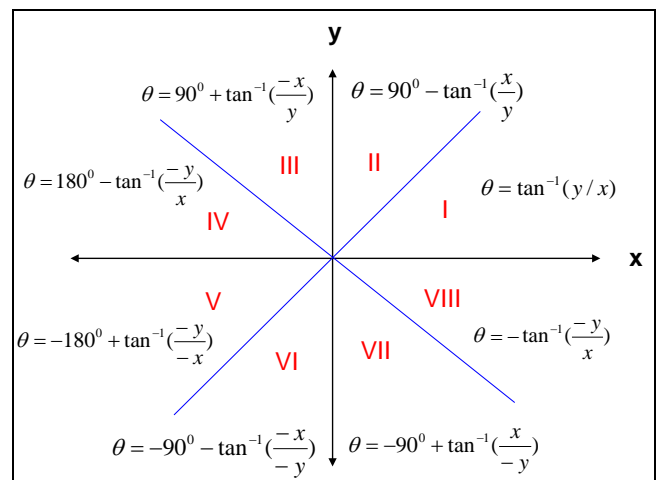


圖 4 計算 $\theta = a \tan 2(y/x)$

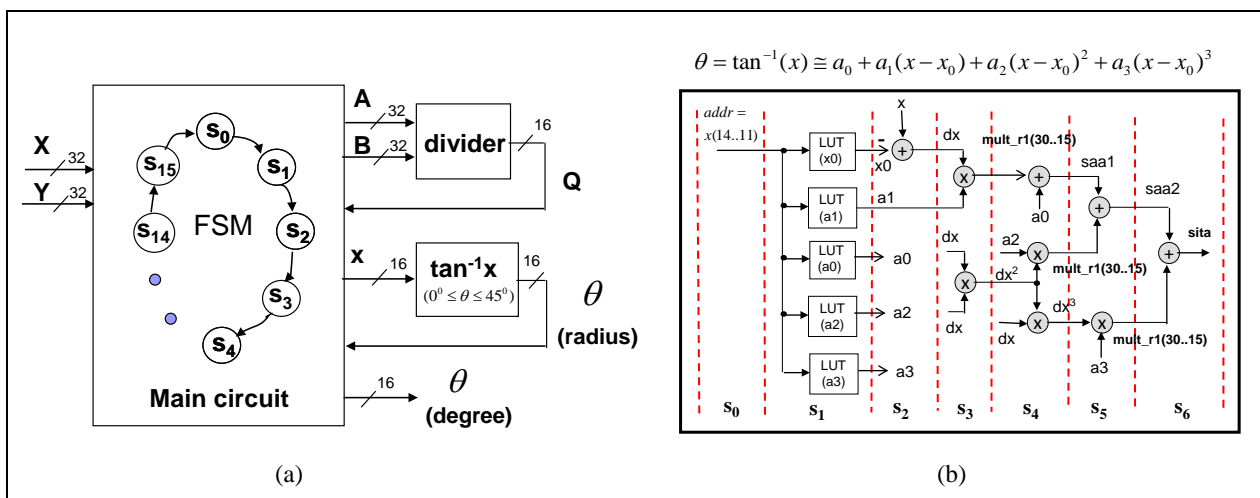


圖 5 (a) $a \tan 2(y/x)$ 函數之硬體實現方塊圖，(b) 以 FSM 法設計 $\tan^{-1}(x)$ 函數之多項式計算



4. 運動學/反運動學控制硬體 IP 之設計與模擬

本節主要針對六軸垂直關節型機械手臂運動學 IP 與反運動學 IP 之硬體語言描述與設計作介紹，並應用 Modelsim/Simulink 共同模擬來驗證其正確性。

4.1 六軸垂直關節型機械手臂運動學 IP 設計與模擬

六軸垂直關節型機械手臂運動學IP之計算，其輸入變數為手臂各軸之旋轉角度 $\theta_1 \sim \theta_6$ 與工具端點相對於 $x_6y_6z_6$ 的座標值 $tool_x$ 、 $tool_y$ 、 $tool_z$ 而輸出為工具末端相對於底座 $x_0y_0z_0$ 的座標值 end_x 、 end_y 、 end_z 、Roll、Pitch、Yaw、 $config0$ 、 $config1$ 、 $config2$ 。運動學IP之輸出入方塊如圖 6 所示。

運動學IP設計之計算式如 2.1 節所示，由於運動學整體計算步驟很多，在此僅以計算 $t_0 \sim t_7$ 為

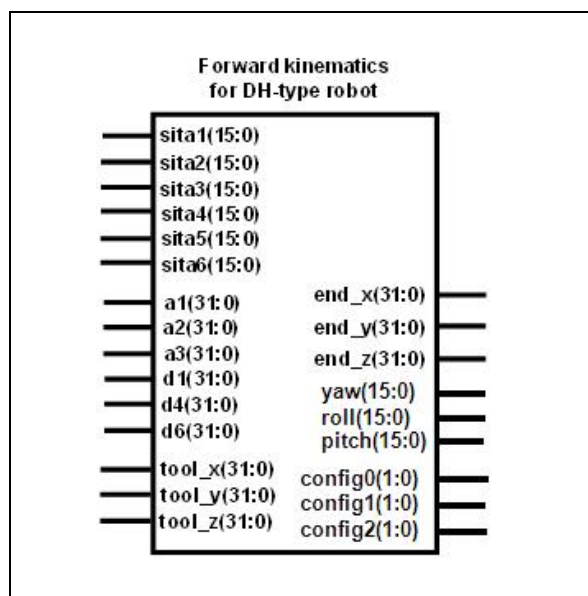


圖 6 六軸垂直關節型機械手臂運動學 IP 之輸出入方塊例來說明如何以有現狀態機器法來設計其電路。 $t_0 \sim t_7$ 之計算公式除了 t_7 採用 32 位元 Q15 格式外，其餘計算皆採用 16 位元 Q15 格式計算。以有限狀態機器法設計 $t_0 \sim t_7$ 計算之電路如圖 7 所示。其中步驟 $s_0 \sim s_{29}$ 為 $\theta_1 \sim \theta_6$ 之 \sin 函數與 \cos 函數查表值；步驟 $s_{30} \sim s_{53}$ 為 $t_0 \sim t_6$ 計算之電路，這些步驟採用 16 位元 Q7 格式計算；步驟 $s_{53} \sim s_{59}$ 為 t_7 計算之電路，此步驟採用 32 位元 Q15 格式計算。圖 7 中，每一步驟皆採用一個乘法器及一個加法器。由於每一步驟在 50 MHz 之 FPGA 晶片僅要 20 ns，因此計算 $t_0 \sim t_7$ 總共需要 $20 \text{ ns} \times 60 = 1.2 \mu\text{s}$ 。

接著，進一步介紹圖 6 內六軸垂直關節型機械手臂運動學之整體計算。雖然此計算很複雜，仍可使用 FSM 法來設計。整體 IP 設計，採用一個乘法器及數個加法器，以節省計算步驟，整個運動學 IP 之計算總共需要 215 步驟完成計算，換算執行時間約 $20 \text{ ns} \times 215 = 4.3 \mu\text{s}$ ，而整體電路佔用 FPGA 之硬體資源約 8,289 LEs (邏輯閘元件) 及 105,728 RAM bits。設計好的運動學 IP，將在



ModelSim及SimuLink內模擬。此處，機械手臂之幾何參數值(單位為mm)，設計為 $a_1=75$ 、 $a_2=270$ 、 $a_3=90$ 、 $a_4=a_5=a_6=0$ 、 $d_1=345$ 、 $d_4=295$ 、 $d_3=d_5=d_6=0$ 、 $d_2=102$ 。模擬時，當輸入值 $tool_x=10$ 、 $tool_y=-15$ 、 $tool_z=100$ 且 $\theta_1=109.53^\circ$ 、 $\theta_2=-18.375^\circ$ 、 $\theta_3=114.56^\circ$ 、 $\theta_4=-11.89^\circ$ 、 $\theta_5=-0.12^\circ$ 、 $\theta_6=50.32^\circ$ 時，

其模擬架構如圖 8 所示，而其模擬結果如圖 9 所示。由所發展之 IP 之模擬結果 $end_x=-277.209899\dots$ 、 $end_y=765.236267\dots$ 、 $end_z=419.554229\dots$ 、 $roll=-141.578125$ 、 $yaw=109.5$ 、 $pitch=6.0703125$ 。與Matlab軟體之模擬結果相比

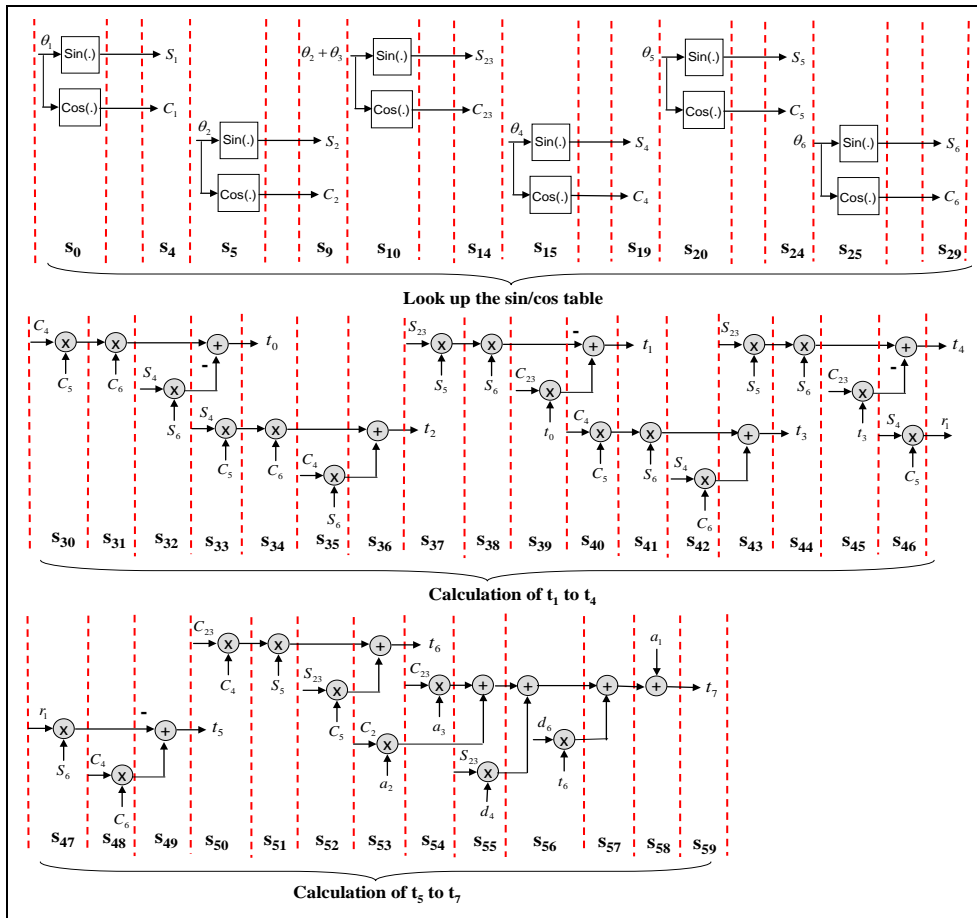


圖 7
以FSM法設計計算 t_0-t_7 之電路

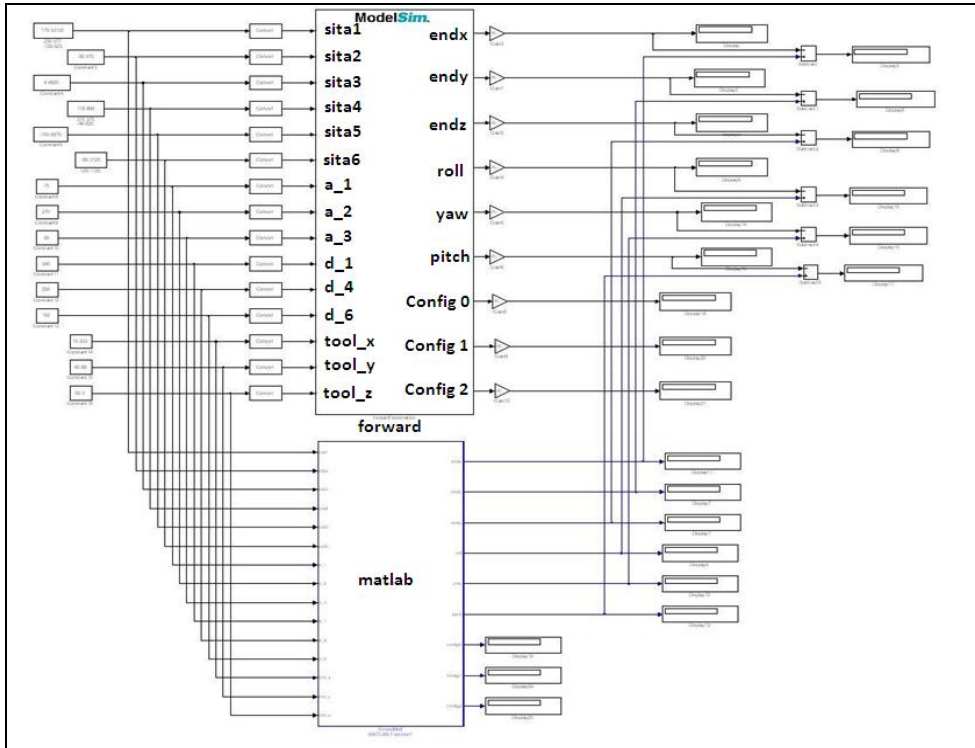


圖 8
運動學 IP 之模擬架構圖

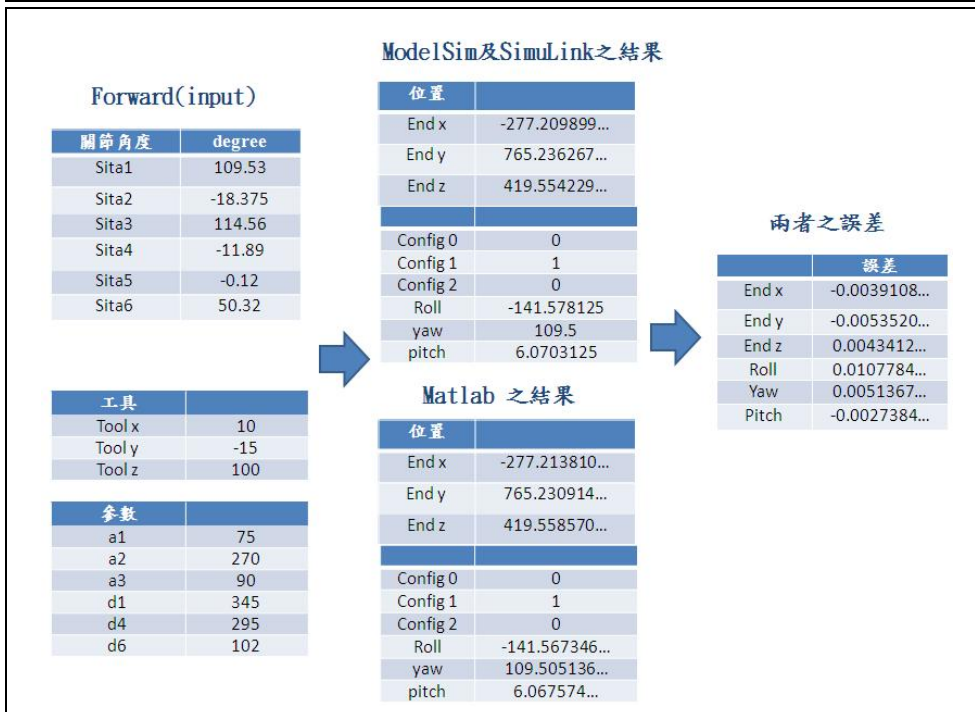


圖 9
運動學 IP 之模擬結果

較，其 end_x 、 end_y 及 end_z 之誤差小於 0.0054 mm，而 $roll$ 、 yaw 、 $pitch$ 之誤差最大約 0.011 mm。

4.2 六軸垂直關節型機械手臂反運動學 IP 設計與模擬



六軸垂直關節型機械手臂反運動學IP，輸入變數為工具末端相對於底座 $x_0y_0z_0$ 的座標值 end_x 、 end_y 及 end_z ，工具之方位角(Roll-Pitch-Yaw) ψ 、 θ 、 ϕ ，工具端點相對於 $x_6y_6z_6$ 的座標值 $tool_x$ 、 $tool_y$ 、 $tool_z$ 及機械手臂之姿態 $config0$ 、 $config1$ 、 $config2$ ；而輸出變數主要為機械手臂各軸之旋轉角度 $\theta_1 \sim \theta_6$ 。反運動學IP之輸出入方塊如圖 10 所示。

六軸垂直關節型機械手臂反運動學之計算公式如 2.2 節所示。以有限狀態機器法設計 $c_x \sim c_z$ 及計算 θ_1 之電路如圖 11 所示，其中步驟 $s_0 \sim s_{16}$ 為 $c_x \sim c_z$ 所需計算之電路，這些步驟皆採用 32 位元

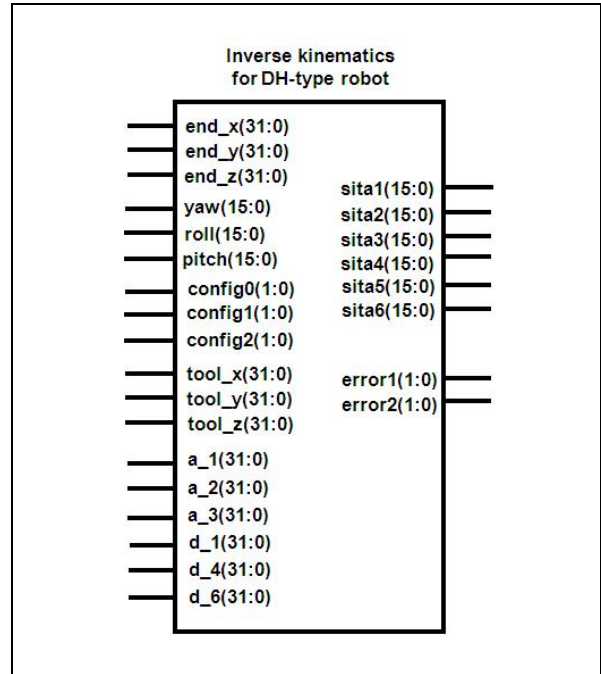


圖 10 六軸垂直關節型機械手臂反運動學 IP 之輸出入方塊圖

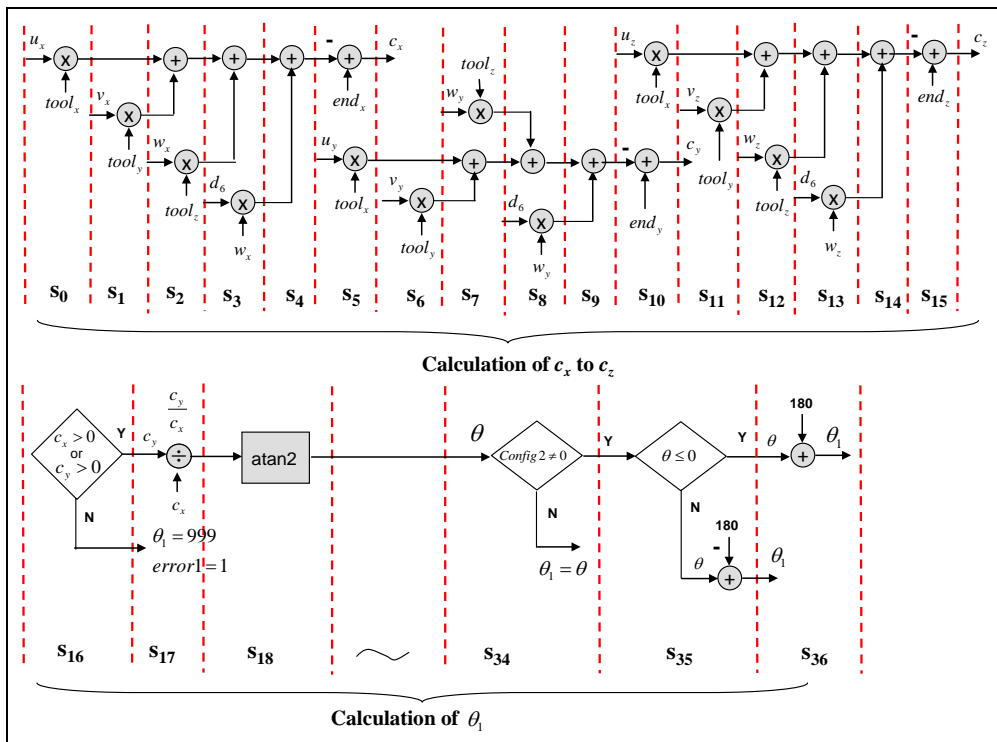


圖 11 以FSM法設計 $c_x \sim c_z$ 及計算 θ_1 之電路



Q15 格式計算；步驟 $s_{17} \sim s_{36}$ 為計算 θ_1 所需之電路，這些步驟採用 16 位元計算，計算 atan2 函數需要 16 個步驟之時間。圖 11 中，每一步驟皆採用一個乘法器及一個加法器，由於每一步驟在 50 MHz 之FPGA晶片僅要 20 ns，因此計算 $p_x \sim p_z$ 及計算 θ_1 總共需要 $20 \text{ ns} \times 37 = 740 \text{ ns}$ 。

整個六軸垂直關節型機械手臂反運動學IP (圖 10)之計算，採用兩個乘法器，以節省計算步驟，如此共需要 269 步驟完成，總執行時間約 $20 \text{ ns} \times 269 = 5.4 \mu\text{s}$ ，而整體電路需佔用FPGA之硬體資源約 14,646 LEs 及 105,728 RAM bits。設計好的反運動學IP，將在ModelSim及SimuLink內模擬。在與 4.1 節相同的六軸垂直關節型機械手臂之幾何參數值下，當輸入值 $tool_x=10$ 、 $tool_y=-15$ 、 $tool_z=100$ 且 $end_x=500.123$ 、 $end_y=430.99$ 、 $end_z=420.256$ 、 $config0=0$ 、 $config1=0$ 、 $config2=0$ 、 $yaw=50.26$ 、 $roll=80.5$ 、 $pitch=10.333$ 時，其模擬架構如圖 12，

而其模擬結果如圖 13 所示。由所發展之IP，模擬結果 $\theta_1 = 35.734375^\circ$ 、 $\theta_2 = 59.5078125^\circ$ 、 $\theta_3 = -21.5859375^\circ$ 、 $\theta_4 = 164.03125^\circ$ 、 $\theta_5 = -63.640625^\circ$ 、 $\theta_6 = 90.3984375^\circ$ 。與Matlab軟體之模擬結果相比較，誤差值小於 0.022° 。

5. 結論

本案主要完成六軸垂直關節型機械手臂運動學/反運動學控制硬體 IP 之設計，並以 ModelSim/Simulink 共同模擬技術證實其正確性與有效性。整個六軸垂直關節型機械手臂運動學 IP 及反運動學 IP 在 FPGA 晶片內之執行時間各自為 $4.3 \mu\text{s}$ 及 $5.4 \mu\text{s}$ ，此快速的計算能力將可提高六軸垂直關節型機械手臂的運動性能。

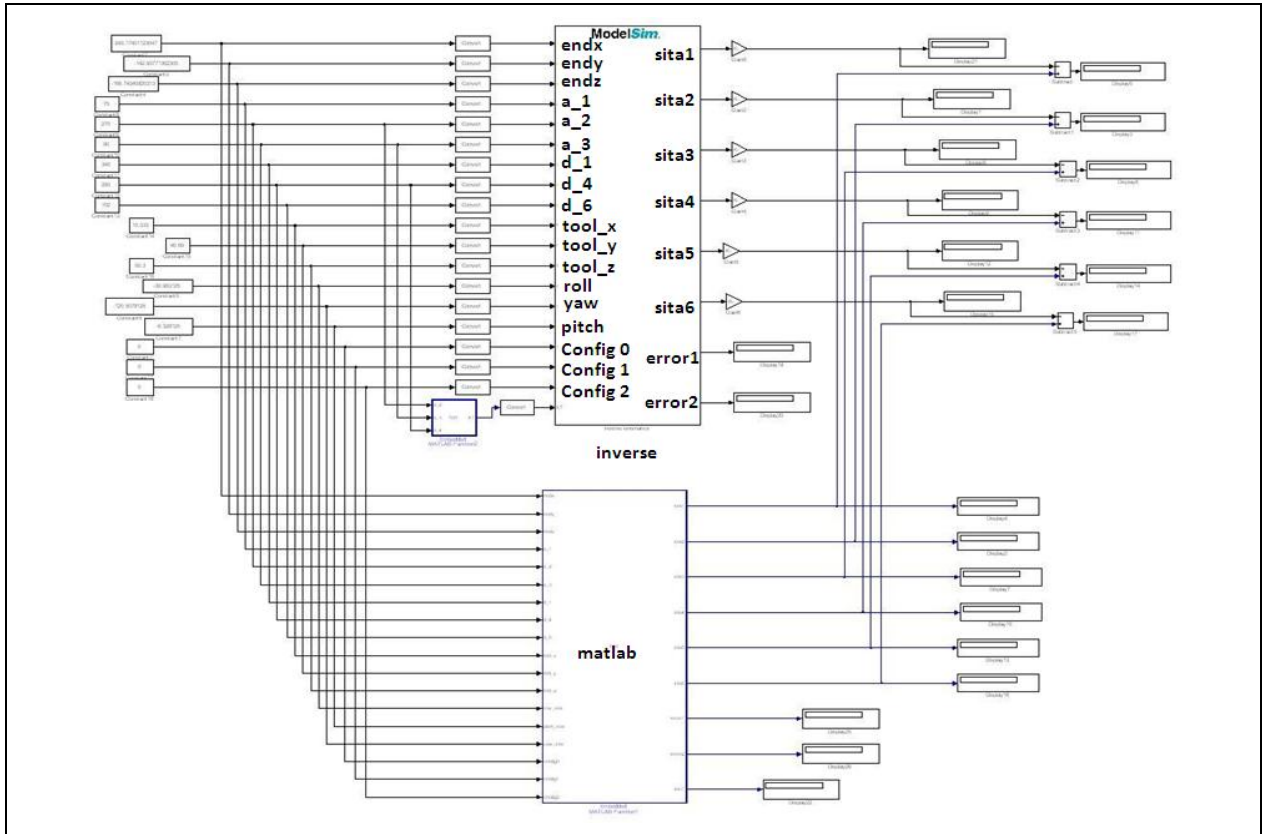


圖 12 反運動學 IP 之模擬架構圖

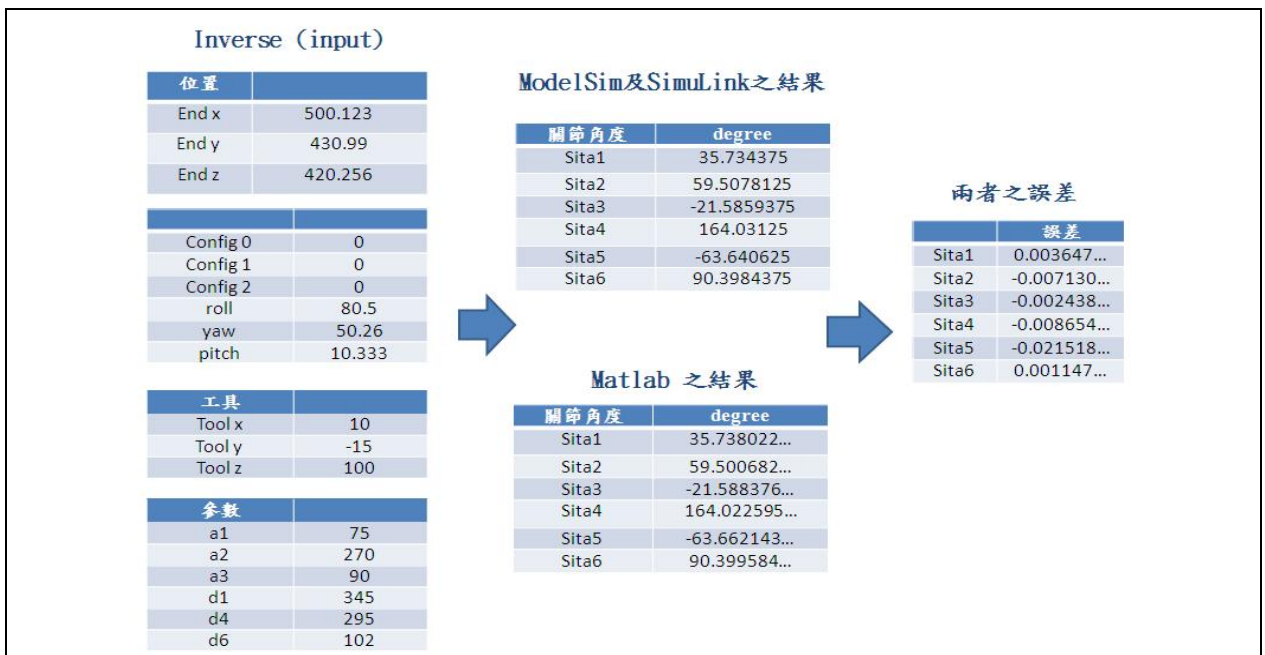


圖 13 反運動學 IP 之模擬結果



致謝

感謝工業技術研究院機械與系統研究所(計畫編號 C353C74200)的支持,使本計畫得以順利進行,特此致上感謝之意。

參考文獻

- [1] L. W. Tsai, "Robot Analysis-The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators," John Wiley & Sons, Inc, 1999.
- [2] Y. S. Kung, K. H. Tseng, C. S. Chen, H. Z. Sze, and A. P. Wang, "FPGA-Implementation of Inverse Kinematics and Servo Controller for Robot Manipulator," Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (IEEE ROBIO), pp. 1163~1168, December 17-20, 2006.
- [3] G. S. Huang, C. K. Tung, H. C. Lin, and S. H. Hsiao, "Inverse Kinematics Analysis Trajectory Planning for a Robot Arm," Proceedings of 2011 8th Asian Control Conference (ASCC), pp. 965~970, 2011.
- [4] J. U. Cho, Q. N. Le, and J. W. Jeon, "An FPGA-based multiple-axis motion control chip," IEEE Trans. Ind. Electron., Vol. 56, No. 3, pp. 856-870, March 2009.
- [5] Y. S. Kung, Nguyen Vu Quynh, C. C. Huang, and L. C. Huang, "Simulink/ModelSim co-simulation of sensorless PMSM speed controller," Proceedings of the 2011 IEEE Symposium on Industrial Electronics and Applications (ISIEA 2011), pp. 24-29, 2011.